

Analyse I – Série 12 – Corrigé

Echauffement. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les séries de Mac-Laurin et leurs rayons de convergence pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$

f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

g) $f(x) = \operatorname{Log}(1+x)$

h) $f(x) = \operatorname{Log}(1-x)$

Sol.: On part des formules vues en cours :

$$a) \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad b) \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$c) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R} \qquad d) e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e) \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\underbrace{1 - (-1)^n}_{=\begin{cases} 0, n \text{ pair} \\ 2, n \text{ impair} \end{cases}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f) \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\underbrace{1 + (-1)^n}_{=\begin{cases} 0, n \text{ impair} \\ 2, n \text{ pair} \end{cases}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g) \operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in]-1, 1]$$

$$h) \operatorname{Log}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-x)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n, \quad x \in [-1, 1[$$

Exercice 1. (Formules de dérivées)

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

a) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

b) $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

c) $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

d) $\frac{d}{dx} \operatorname{Log}(1+x) = \frac{1}{1+x}$

Sol.:

Notez que dans les exemples ci-dessous on peut échanger la dérivation et la somme infinie parce qu'il s'agit de séries entières qui convergent, mais gardez à l'esprit que cet échange n'est pas toujours

autorisé dans le cas général. Pour la série de Mac-Laurin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on a donc

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} (x^n).$$

$$\begin{aligned}
a) \quad \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \\
b) \quad \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x) \\
c) \quad \frac{d}{dx} \cos(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x) \\
d) \quad \frac{d}{dx} \text{Log}(1+x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1 \quad (\text{série géométrique})
\end{aligned}$$

Exercice 2. (Séries entières)

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

a) $a = 0$

b) $a = 2$

Sol.: On utilise que le développement de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en série entière est $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ pour tout $z \in]-1, 1[$.

1. On peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{3}x}.$$

Ainsi, en posant $z := -\frac{4}{3}x$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n x^n \quad \text{pour } x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[.$$

2. De façon similaire, on peut récrire

$$f(x) = \frac{2}{3+4x} = \frac{2}{11+4(x-2)} = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{11}(x-2)}$$

de telle sorte qu'en posant $z := -\frac{4}{11}(x-2)$, on obtient que son développement en série entière est

$$f(x) = \frac{2}{11} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{11}\right)^n (x-2)^n,$$

avec intervalle de convergence $\left]-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}\right[$ (obtenue à partir de $z = -\frac{4}{11}(x-2) \in]-1, 1[$).

Remarque générale : On peut aussi calculer le rayon de convergence de ces séries en utilisant les formules du cours

$$r = 1 \left/ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right. \quad \text{ou} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1)$$

si ces limites existent.

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Écrire la formule de Taylor à l'ordre n autour de $x = a$, et la série de Taylor autour de a . Quel est le domaine de convergence de la série de Taylor ? Lorsqu'elle converge, est-elle égale à f ? (On pourra utiliser la 2ème méthode vue en cours pour $x \mapsto 1/(1-x)$.)

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$,

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Sol.: Si $f \in C^\infty(I)$, la série de Taylor de f en a est donnée par $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ pour $x \in I$ ($S(x)$ ne coïncide pas nécessairement avec $f(x)$).

1. On a $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x+1}$ et $f^{(n)}(0) = 2^n \cdot e$. Ainsi le développement limité d'ordre n de f autour de $a = 0$ est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k e}{k!} x^k + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \frac{2^{n+1} \cdot e^{2u+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{pour un certain } u \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

La série de Taylor de f autour de $a = 0$ est donnée par

$$S(x) = e^{2x+1} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et son rayon de convergence est $R = \infty$.

En outre, étant donné que pour x fixé

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1} \cdot e \cdot \max\{e^{2x}, 1\}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

il suit que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $S(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On utilise directement la formule de Taylor. On calcule que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{3^{n+1}}.$$

D'où le développement limité d'ordre n de $f(x)$ autour de 2 :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-2)^k}_{=f_n(x)} + R_n(x)$$

où $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{u+1} \left(\frac{x-2}{u+1} \right)^{n+1}$ pour un certain u entre 2 et x .

Par ailleurs, on peut reconnaître en $f(x)$ la somme d'une série géométrique. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-2)^n$$

qui converge si et seulement si $-1 < -\frac{1}{3}(x-2) < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 5$, et on reconnaît la série de Taylor de f qui coïncide, dans ce cas, avec f pour $-1 < x < 5$. Ceci montre par ailleurs que $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-2)^k$ et donc converge vers 0 si et seulement si $-1 < x < 5$.

Exercice 4. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les trois premiers termes non nuls de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

b) $f(x) = \text{tg}(x)$

c) $f(x) = \text{Arctg}(x)$ (utiliser la formule de Taylor) d) $f(x) = \sqrt{1 + \text{tg}(x)}$

Sol.:

1. Observons que $\text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{Log}(1-x) - \text{Log}(1+x)$. Ainsi on peut calculer la série complète de Mac-Laurin en additionnant terme par terme les séries trouvées à l'Echauffement vii) et viii) (ceci est permis puisque les deux séries convergent absolument pour $x \in]-1, 1[$). On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{=\begin{cases} -2, n \text{ impair} \\ 0, n \text{ pair} \end{cases}} \right) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Remarque : Pour obtenir seulement les trois premiers termes de la série, on pourrait aussi utiliser les développements limités adéquats de $\text{Log}(1-x)$ et $\text{Log}(1+x)$.

2. Méthode 1 : Utiliser l'égalité $\text{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et les développements limités d'ordre 5 de

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x).$$

ainsi que celui d'ordre 2 de

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

Comme $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x)$, on obtient

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x) \right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x) \right)^2 + x^4 \varepsilon(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$$

et ainsi

$$\text{tg}(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x) \right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5 \varepsilon(x) \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x),$$

c'est-à-dire

$$\text{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x).$$

Méthode 2 : Utiliser la définition de la série Taylor et donc calculer les dérivées de $f(x) = \text{tg}(x)$ qui sont :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos(x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{2 + 4 \sin(x)^2}{\cos(x)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8 \sin(x) (2 + \sin(x)^2)}{\cos(x)^5}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{8 (2 + 11 \sin(x)^2 + 2 \sin(x)^4)}{\cos(x)^6},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16.$$

Ainsi

$$\text{tg}(x) = \frac{1}{1!} x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + x^5 \varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x).$$

3. On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3},$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 24.$$

Ainsi

$$\operatorname{Arctg}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{24}{5!}x^5 + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x).$$

4. On utilise que pour $|x| < 1$ on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$. Ainsi

$$(1 + \operatorname{tg}(x))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{8}\operatorname{tg}(x)^2 + \frac{1}{16}\operatorname{tg}(x)^3 + \underbrace{\operatorname{tg}(x)^3\varepsilon(\operatorname{tg}(x))}_{=x^3\varepsilon(x)},$$

où $\operatorname{tg}(x)^3\varepsilon(\operatorname{tg}(x)) = x^3\varepsilon(x)$ par un argument comme à l'Ex. 5iii) de la Série 11 parce que $\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ est aussi borné autour de $x = 0$. Comme

$$\operatorname{tg}(x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)\right)^2 = x^2 + x^3\varepsilon(x)$$

et

$$\operatorname{tg}(x)^3 = (x^2 + x^3\varepsilon(x)) \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)\right) = x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

on a finalement

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}(x)} = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11x^3}{48} + x^3\varepsilon(x).$$

Exercice 5. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

V F

- a) Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a . □ □
- b) Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I , alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$. □ □
- c) Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$. □ □

Sol.:

a) FAUX.

Le développement limité d'ordre de 7 de f en a est donné par $f(a+h) = \frac{f^{(7)}(a)}{7!}h^7 + h^7 \cdot \varepsilon(h) = h^7(\frac{1}{7!} + \varepsilon(h))$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\frac{1}{7!} + \varepsilon(h) > 0$ du moment que $|h| \leq \varepsilon_1$. Comme 7 est impair, on a donc $f(a+h) < 0 = f(a)$ pour $h \in [-\varepsilon_1, 0[$ et $f(a+h) > 0 = f(a)$ pour $h \in]0, \varepsilon_1]$ donc f n'admet pas de minimum local en a .

b) *VRAI.*

Comme $f \in C^{n+1}(I)$, son développement limité d'ordre n autour de 0 est

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

si bien que

$$f(-x) = a_0 - a_1x + \cdots + (-1)^na_nx^n + x^n\varepsilon(x).$$

Or, comme f est impaire et $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour $k = 0, \dots, n$ par la formule de Taylor (s'il existe un développement limité, il est unique), il suit que

$$a_0 - a_1x + \cdots + (-1)^na_nx^n + x^n\varepsilon(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} + x^n\varepsilon(x) = -a_0 - a_2x^2 - \cdots - a_{2k}x^{2k} + x^n\varepsilon(x)$$

pour tout $x \in I$, d'où le résultat.

c) *VRAI.*

Les développements limités d'ordre n de f et g autour de a sont

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varepsilon(x)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \varepsilon(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

grâce à la propriété de $\varepsilon(x)$.

Exercice 6. (V/F : Fonction définie par un développement limité)

Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

	V	F
a) Alors f est continue en 0.	☐	☐
b) Si $f \in C^2(]-1, 1[)$, alors $f''(0) = c$.	☐	☐
c) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b$.	☐	☐
d) $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6\varepsilon(x)$.	☐	☐

Sol.:

a) *VRAI.*

Clairement $f(0) = 0$. Et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ (donc fini), on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ si bien que f est continue en 0.

b) *FAUX.*

Si f est de classe $C^2(]-1, 1[)$, le coefficient a_2 du développement limité de f autour de 0 est $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$ par la formule de Taylor. Comme $a_2 = c$ ici, il suit que $f''(0) = 2c$.

c) *VRAI.*

Par un calcul direct on a $\frac{f(x)}{x} = b + cx + x^3\varepsilon(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, le résultat en suit.

d) FAUX.

On calcule

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(bx + cx^2 + x^4 \varepsilon(x) \right)^2 = b^2 x^2 + 2bcx^3 + c^2 x^4 + 2bx^5 \varepsilon(x) + 2cx^6 \varepsilon(x) \\ &= b^2 x^2 + 2bcx^3 + c^2 x^4 + x^5 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

parce que $\lim_{x \rightarrow 0} 2(b + cx)\varepsilon(x) = 0$. On voit que cette expression de $f(x)^2$ ne correspond pas à celle de l'énoncé rien qu'à cause du terme en x^3 . Noter qu'on pourrait aussi choisir un contre-exemple explicite, par exemple $f(x) = bx + cx^2 + x^5$.

Exercice 7. (Primitives)

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| a) $f(x) = \sin(x)$ | b) $f(x) = \cos(x)$ | c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ |
| d) $f(x) = e^x$ | e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ | f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ |
| g) $f(x) = \operatorname{Log}(x)$ | h) $f(x) = \frac{1}{x}$ | i) $f(x) = (ax + b)^s$
($s \neq -1$) |
| j) $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ | k) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ | l) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ |
| m) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ | n) $f(x) = x \exp(x^2)$ | o) $f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1}$
($s \neq -1, a, p \neq 0$) |

Sol.:

Les primitives F sont définies à une constante $C \in \mathbb{R}$ près.

1. $F(x) = -\cos(x) + C$ (cf. cours)
2. $F(x) = \sin(x) + C$ (cf. cours)
3. $F(x) = -\operatorname{Log}(|\cos(x)|) + C$ (cf. cours)
4. $F(x) = e^x + C$ (cf. cours)
5. $F(x) = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \operatorname{ch}(x) + C$
6. $F(x) = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \operatorname{sh}(x) + C$
7. $F(x) = x(\operatorname{Log}(x) - 1) + C$ (cf. cours)
8. $F(x) = \operatorname{Log}(|x|) + C$ (cf. cours)
9. $F(x) = \int (ax + b)^s dx = \frac{1}{a} \int a(ax + b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax + b)^{s+1} + C$ car $(ax + b)' = a$ et
donc $F(x) = \frac{1}{a} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \frac{1}{a} \int f(t) dt$ avec $f(t) = t^s$ et $t = \varphi(x) = ax + b$.
10. $F(x) = \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = \operatorname{Log}(|1+x|) - \operatorname{Log}(|1-x|) + C = \operatorname{Log}\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$
11. $F(x) = \int \frac{1}{(1+x)(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + C$

- 12.** $F(x) = -\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\text{Log}(|1-x^2|) + C \quad \text{car } (1-x^2)' = -2x \quad (\text{même idée qu'au ix})$
- 13.** $F(x) = \int \frac{1}{\text{tg}(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \text{Log}(|\sin(x)|) + C \quad \text{car } (\sin(x))' = \cos(x) \quad (\text{même idée qu'au ix})$
- 14.** $F(x) = \frac{1}{2} \int 2x \exp(x^2) dx = \frac{1}{2} \exp(x^2) + C \quad (\text{même idée qu'au ix})$
- 15.** $F(x) = \int (ax^p + b)^s x^{p-1} dx = \frac{1}{ap} \int ap x^{p-1} (ax^p + b)^s dx = \frac{1}{ap(s+1)} (ax^p + b)^{s+1} + C$
 $\text{car } (ax^p + b)' = ap x^{p-1} \quad (\text{même idée qu'au ix})$

Exercice 8. (Intégration immédiate)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes, en cherchant directement à reconnaître la dérivée d'une fonction :

$$\text{a) } \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx \quad \text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx \quad \text{d) } \int \frac{\text{sh}(x)}{e^x+1} dx$$

Sol.: Dans cette série, on va calculer ces intégrales en les ramenant à des primitives standards. Avec l'avancement du cours vous verrez qu'on pourrait aussi utiliser d'autres méthodes d'intégration.

a) On sépare la somme en deux termes

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{1+x^2} dx &= \int \left(\frac{3x}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2} \right) dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 4 \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \text{Log}(1+x^2) + 4 \text{Arctg}(x) + C. \end{aligned}$$

b) On utilise que la fonction à intégrer est une dérivée en chaîne

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} = -f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = -\left(F(\varphi(x))\right)',$$

avec $\varphi(x) = \cos(x)$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - C$ une primitive de F . Ainsi

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx = -\left(-\frac{1}{2\cos(x)^2} - C\right) = \frac{1}{2\cos(x)^2} + C.$$

c) On remarque qu'il faut intégrer une composition avec une fonction affine, c.-à-d.

$$\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}}.$$

Comme $(\text{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, la fonction $\text{Arcsin}(x) + C$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C.$$

d) En utilisant la définition du sinus hyperbolique et une identité remarquable, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - (e^{-x})^2}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - e^{-x}) dx = \frac{1}{2} (x + e^{-x}) + C.\end{aligned}$$

Exercice 9. (Révisions : suites définies par récurrence)

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

- a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$,
- b) Montrer que (a_n) est décroissante,
- c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.

Sol.:

- a) On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a $2 \leq a_1 = \frac{5}{2} \leq 3$. Supposons alors que $2 \leq a_n \leq 3$. On a d'une part que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \leq \frac{3^2 + 6}{5} = 3,$$

et d'autre part que

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5} \geq \frac{2^2 + 6}{5} = 2,$$

ce qui montre bien que $2 \leq a_{n+1} \leq 3$.

- b) On calcule

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n = \frac{1}{5}(a_n^2 - 5a_n + 6) = \frac{1}{5} \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \underbrace{(a_n - 2)}_{\geq 0} \leq 0,$$

donc (a_n) est décroissante.

- c) Étant minorée (par 2) et décroissante, (a_n) converge : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$. La valeur de ℓ peut être trouvée en prenant $n \rightarrow \infty$ des deux côtés de l'identité $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$. Comme $a_{n+1} \rightarrow \ell$ et $a_n^2 \rightarrow \ell^2$, ℓ doit satisfaire

$$\ell = \frac{\ell^2 + 6}{5}.$$

Cette dernière a pour solutions $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$. Comme la suite est décroissante, on doit avoir $\ell \leq a_1 = \frac{5}{2}$, la limite est donc $\ell = \ell_1 = 2$.