Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Objectif: Grammaire mathématique et fonctions
Théorie nécessaire: Slide 1er cours

Vrai ou faux ?

Q1 : $\forall f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $\exists r\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x_0)=r.$$

Q2 : $\exists x_0\in\mathbb{R}$ tel que $\forall f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0)=r.$$

Q3 : $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que $\forall f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists x_0\in\mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0)=r.$$

Q4 : $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $\exists r\in\mathbb{R}$ tels que $\forall f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x_0)=r.$$

Exercice 2.

Objectif: Continuité de fonctions définies par étapes
Théorie nécessaire: Exemple 5.7

Est-ce que la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}\,, & x>1\\ 3\,, & x\leq 1\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.

Objectif: Calcul de limites (éventuellement limites latérales) à l'aide de critères ou des propriétés algébriques

Calculer les limites ci-dessous.

(i) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, où $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(iii) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$.

(iv) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

(v) $\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+\alpha)^n-\alpha^n}{x}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes.

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}$.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+7x}} \arctan x$.

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Exercice 5.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ (avec $x_0\in\mathbb{R}$) et si $f(x)\geq 0$, alors $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

Q2 : Si f est impaire et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-l$.

Q3 : Si f est paire et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Q4 : Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

Q5 : Si $|f|$ est continue en tout point, alors f aussi est continue en tout point.

Q6 : Si f n'est continue en aucun point, alors f^2 a la même propriété.

Exercice 6.

Objectif: Continuité de fonctions définies par étapes
Théorie nécessaire: Exemple 5.7

Étudier la continuité des fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ci-dessous en $x=0$.

(i) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+2^{1/x}}\,, & x\neq 0\\ 1\,, & x=0\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\,, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}\,, & x=0\end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 7.

> **Objectif:** Prolonger des fonctions par continuité si possible
> **Théorie nécessaire:** Cours 5.8-5.9

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité des fonctions f suivantes au point x_0, ou alors montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en x_0.

(i) $f\colon [0,1[\,\cup\,]1,\infty[\,\to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3}}$ $\quad$ en $x_0 = 1$.

(ii) Soit $A = \left\{ \left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

$f\colon]0,1] \setminus A \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2$ $\quad$ pour $x_0 \in A \cup \{0\}$.

(iii) $f\colon]1,2] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3-3x+2}$ $\quad$ en $x_0 = 1$.

Exercice 8.

> **Objectif:** Etude de continuité, exemples impressionnants
> **Théorie nécessaire:** Procéder par étapes : Calculer la limite $\lim_{n\to\infty}$, décrire la limite sous forme de fonction définie par étapes sur x. Calculer la composition sous la forme d'une fonction définie par étapes. Étudier la continuité du résultat.

Étudier la continuité des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

(i) $f(x) = \arcsin\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(x)^{2n}}{1+\sin(x)^{2n}}\right)$ $\qquad$ (ii) $f(x) = x^4\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n-1}{x^{2n}+1}\right)$

Exercice 9.

> **Objectif:** Fonctions continues sur des intervalles
> **Théorie nécessaire:** Cours §5.2

Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.
Vrai ou faux ?

Q1 : $f(I)$ est un intervalle.

Q2 : Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.

Q3 : Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.

Q4 : Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Q5 : Si $I = [a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q6 : Si $I = [a,\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.

Q7 : Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Exercice 10.

Objectif: Continuité de fonctions définies par étapes avec paramètres

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

(i) $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ (ii) $\left(1, \dfrac{5}{3}\right)$ (iii) $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$ (iv) $(1, 2)$ (v) $(2, 2)$

Exercice 11.

Objectif: Appliquer le théorème de la valeur intermédiaire
Théorie nécessaire: Théorème 5.15

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions :

(i) $e^{x-1} = x + 1$ (ii) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 3
- (i) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
- (ii) 0
- (iii) $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$
- (iv) 0
- (v) $\dfrac{1}{2}$
- (vi) $n\alpha^{n-1}$

Exercice 4
- (i) $-\dfrac{1}{2}$
- (ii) $-\dfrac{1}{2}$
- (iii) π
- (iv) $\sqrt{2}$