

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

 **Objectif:** Calculer la valeur de séries à partir de séries connues

 **Théorie nécessaire:** Exemple 3.42

Calculer la valeur des séries suivantes

$$(i) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$(ii) \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique. Vrai ou faux ?

Q1 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Q2 : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Q3 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Q4 : Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Q5 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q6 : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Q7 : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 3.

 **Objectif:** Déterminer la convergence de séries à l'aide de critères de convergence

 **Théorie nécessaire:** §3.6

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - n\right)$$

$$(vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$(viii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^d}{(dn)!}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3 + n + 2}$$

Indication :

- Pour la série (v), cette égalité peut vous aider : $1 - \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$, for $x \in \mathbb{R}$.
- Pour la série (viii), considérez les cas $d = 1, 2, 3$.

Exercice 4.

À l'aide du critère de d'Alembert, déterminer, parmi les séries suivantes, lesquelles convergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Exercice 5.

 **Objectif:** Convergence de séries qui dépendent d'un paramètre
 **Théorie nécessaire:** §3.6, exemple 3.53

Étudier la convergence des séries suivantes en fonction de la valeur du paramètre $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} (i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n, \text{ (avec } c \neq 1) & (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n \\ (ii) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n & (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n} \end{array}$$

Quelles sont les valeurs des séries (i) et (iii) lorsqu'elles convergent ?

Exercice 6.

 **Objectif:** Suites définies par récurrence monotones
 **Théorie nécessaire:** Exemple 3.57 (i)

Montrer que les suites suivantes sont convergentes en montrant qu'elles sont monotones et bornées et trouver leur limite.

On propose de procéder de la façon suivante :

- *Étape 1* : Calculer quelques termes. Deviner si la suite sera croissante ou décroissante.
- *Étape 2* : Trouver la limite l en résolvant $l = f(l)$ et en utilisant que $l \geq x_0$ si (x_n) est croissante ou que $l \leq x_0$ si (x_n) est décroissante.
- *Étape 3* : Montrer par récurrence que $x_0 \leq x_n \leq l$ ou $l \leq x_n \leq x_0$.
- *Étape 4* : Montrer que (x_n) est monotone.

$$\begin{array}{ll} (i) & x_0 = 1, x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt{2 + x_n}. \\ (ii) & x_0 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_n. \\ (iii) & x_0 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = f(x_n) = 3 - \frac{1}{x_n}. \end{array}$$

Exercice 7.

Montrer que les suites définies par récurrence suivantes convergent et trouver leur limite.

$$\begin{array}{ll} (i) & x_0 = 3, x_{n+1} = -\frac{2}{3}x_n + 1. \\ (ii) & x_0 = \frac{5}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 6}{5}. \\ (iii) & x_0 = -3, x_{n+1} = 2x_n + 3. \end{array}$$

Exercice 8.

🎯 Objectif: Développer les bons réflexes dans le cas d'exercices qui peuvent être impressionnants

Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 14x}{4(x-1)}$$

et la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad \forall n \geq 0$$

Alors :

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.
- ☐ (x_n) diverge, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$.
- ☐ (x_n) diverge, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Exercice 9.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2} \cos(x) - \frac{3\pi}{4} \sin(x).$$

(i) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad n \geq 0.$$

Alors,

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} x_0 = \pi \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad n \geq 0.$$

Alors,

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 (*Facultatif*).

Le but de cet exercice est de montrer que la série harmonique diverge, c-à-d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

On propose de procéder de la façon suivante. Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Considérer la sous suite $(S_{n_j})_{j \geq 1} \subset (S_n)$ donnée par $n_j = 2^j$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $j \geq 1$,

$$S_{n_j} = 1 + \sum_{m=1}^j \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

(b) En utilisant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-1} + 1 \leq k \leq 2^m$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^m}$, montrer que

$$S_{n_j} \geq 1 + \frac{j}{2}.$$

(c) En déduire que $\lim_{j \rightarrow \infty} S_{n_j} = +\infty$ et donc (S_n) diverge.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 (i) $\frac{1}{3}$
 (ii) $\frac{1}{12}$

Exercice 5 (i) $\frac{c}{1-2c}$
 (iii) $\frac{\sin(\pi c/2)}{1-\sin(\pi c/2)}$

Exercice 8 Avez-vous écrit quelques termes de la suite ?

Exercice 9 Avez-vous écrit quelques termes de la suite ?