

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice (À rendre le 14 octobre).

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$$

Exercice 1.

 **Objectif:** Le module de l'exponentielle d'un nombre complexe
 **Théorie nécessaire:** Proposition 2.14 (i)

Calculer le module des nombres complexes suivants :

(i) e^{i+1}

(iii) $e^{-(i-1)}$

(v) $e^{(1-50i)}$

(ii) $e^{-(i+1)}$

(iv) $e^{(i-50)}$

Exercice 2.

 **Objectif:** Propriétés des suites
 **Théorie nécessaire:** Définition 3.3

Montrer que la suite donnée par $a_n = \frac{3n}{n+2}$ (avec $n \geq 1$) est croissante et bornée.

Exercice 3.

 **Objectif:** Propriétés des suites
 **Théorie nécessaire:** Définition 3.3

Déterminer si les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ suivantes sont monotones :

(i) $a_n = n^2 - 4n + 1$

(ii) $a_n = \frac{n}{2n-1}$

Exercice 4.

 **Objectif:** Racines $n^{\text{ème}}$ de nombres complexes
 **Théorie nécessaire:** Cours 2.21-2.24

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$(i) \ z^5 = 1 \qquad (ii) \ z^2 = -3 + 4i \qquad (iii) \ z^4 = -2i \qquad (iv) \ z^3 = -\sqrt{3} + i$$

Représenter les résultats graphiquement.

Exercice 5.

🎯 Objectif: Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$
📖 Théorie nécessaire: Remarque 2.28

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$(i) \ z^2 + 6z + 12 - 4i = 0 \qquad (ii) \ z^6 - 2z^3 + 2 = 0$$

Exercice 6.

🎯 Objectif: Racines/factorisation de polynômes dans $\mathbb{C}$
📖 Théorie nécessaire: Exemple 2.27

Factoriser les polynômes suivants :

$$(i) \ p(z) = \frac{1}{2}z^3 - 4z^2 + 7z - 6 \qquad (ii) \ p(z) = z^3 - (3 + 3i)z^2 + (-2 + 9i)z + 6$$

Indication : Après avoir fait la liste de toutes les valeurs z_0 pour lesquelles on teste $p(z_0)$ pour voir si on obtient 0 (y en a pas mal) tester avec $z_0 = -1, 1, 3, 6$ (ça fait moins à tester).

Exercice 7.

Vrai ou faux ?

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$. (*Voir Remarque 0.46 (p.16) du polycopié.*)

Q2 : Soient $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit purement imaginaire (c-à-d. sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ soit réel.

Exercice 8.

🎯 Objectif: Écrire des preuves adéquates pour les limites en utilisant la définition
📖 Théorie nécessaire: Exemples 3.9

Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

$$(i) \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad (ii) \ \forall p > 0, \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \qquad (iii) \ \forall p > 0, \ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0$$

On admettra sans démonstration que pour $p > 0$ (et donc en particulier pour $p = \frac{1}{2}$), la fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^p$ est strictement croissante. C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x < y \Leftrightarrow x^p < y^p$. On aura les outils pour le montrer à la fin du chapitre 6.

Exercice 9.

 **Objectif:** Calcul de limites en utilisant des limites connues et les propriétés algébriques des limites

 **Théorie nécessaire:** Exemples 3.9, Proposition 3.17 et exemple 3.18

Déterminer, si elle existe, la limite $n \rightarrow \infty$ de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ avec

- | | |
|--|---|
| (i) $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$ | (iv) $a_n = e^{-n}$ |
| (ii) $a_n = \frac{1}{2^n}$ | (v) $a_n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{\cos(n+1) + \cos(n-1)}$ |
| (iii) $a_n = e^n$ | (vi) $a_n = 3^n e^{-3n}$ |

Exercice 10.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

Vrai ou faux ?

- Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.
- Q2 : Si (a_n) converge, il existe $\epsilon > 0$ tel que $|a_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q3 : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q4 : Une suite convergente peut admettre plusieurs limites.
- Q5 : Toute suite décroissante converge.
- Q6 : Si $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (a_n) converge vers a , alors $a > 0$.

Exercice 11.

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ la suite définie par

$$a_k = \frac{6 - 2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

et $(x_n)_{n \geq 1}$, la suite définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{6 - 2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

- (i) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{2n}{(n+2)(n+3)}$$

- (ii) Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

- Exercice 1 (i) e
(ii) $\frac{1}{e}$
(iii) e
(iv) e^{-50}
(v) e

- Exercice 4 (i) $z_0 = 1, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}, z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}, z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$
(ii) $z_0 = -1 - 2i, z_1 = 1 + 2i$
(iii) $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$
(iv) $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}}, z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}}, z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$

- Exercice 5 (i) $z_1 = -2 + 2i, z_2 = -4 - 2i$
(ii) $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}, z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{-\pi}{12}}, z_4 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

- Exercice 6 (i) $p(z) = \frac{1}{2}(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 6)$
(ii) $p(z) = (z - i)(z - 2i)(z - 3)$

- Exercice 9 (i) 0
(ii) 0
(iii) $+\infty$
(iv) 0
(v) $\tan(1)$
(vi) 0

- Exercice 11 (ii) 0