EPFL – Automne 2024	D. Strütt
Analyse I – SV	**Exercices**
Série 1	12 septembre 2024

Avant-propos.
La plupart des exercices suivants sont tirés du livre *Analyse : Concepts et Contextes, Volume 1 : Fonctions d'une variable* de James Stewart, édition De Boeck. Ils ont été revisités et mis en forme par Peter Wittwer, enseignant à l'EPFL.
Le but est de repérer les faiblesses que vous pourriez avoir. Si vous avez des difficultés pour résoudre ces exercices, il est vivement conseillé de rattraper le matériel en question.

Partie I : Algèbre.

Pour réviser cette partie (si nécessaire), voir le fichier `http://www.stewartcalculus.com/data/default/upfiles/AlgebraReview.pdf`.

1. Calculer, sans calculatrice, chacune des expressions suivantes.
   a) $(-3)^4$ *b)* -3^4 *c)* 3^{-4} *d)* $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ *e)* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ *f)* $16^{-3/4}$

2. Simplifier chaque expression. Ecrire la réponse sans exposants négatifs.
   a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ *b)* $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ *c)* $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Développer et simplifier.
   a) $3(x+6) + 4(2x-5)$ *b)* $(x+3)(4x-5)$ *c)* $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
   d) $(2x+3)^2$ *e)* $(x+2)^3$ *f)* $(a^{4/3} - a^{2/3} + 1)(a^{2/3} + 1)$

4. Factoriser chaque expression.
   a) $4x^2 - 25$ *b)* $2x^2 + 5x - 12$ *c)* $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
   d) $x^2 + 27x$ *e)* $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ *f)* $x^3y - 4xy$

5. Simplifier l'expression rationnelle.
   a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ *b)* $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9} \cdot \dfrac{x+3}{2x+1}$ *c)* $\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x+2}$ *d)* $\dfrac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

6. Rendre le dénominateur rationnel et simplifier.
   a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ *b)* $\dfrac{h}{\sqrt{9+h}+3}$

7. Simplifier les expressions, où $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}^*$.
   a) $(ab)^p b^{q-p}$ *b)* $a^{p-q}(ab)^q$ *c)* $\dfrac{a^p}{b^{-q}}$ *d)* $\dfrac{b^q}{a^{-p}}$
   e) $\left(ab^{\frac{q}{p}}\right)^p$ *f)* $\left(a^{\frac{p}{q}}b\right)^q$ *g)* $\left(a^{\frac{1}{q}}b^{\frac{1}{p}}\right)^{pq}$ *h)* $\sqrt{a^{2p}}\,b^q$
   j) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^q + \left(\frac{1}{b}\right)^p\right)\dfrac{a^p(ab)^q}{1+\frac{a^q}{b^p}}$ *k)* $a^qb^p\,\dfrac{\frac{a^p+b^q}{\left(\frac{1}{a}\right)^p+\left(\frac{1}{b}\right)^q}}{\frac{a^q+b^p}{\left(\frac{1}{b}\right)^p+\left(\frac{1}{a}\right)^q}}$ *l)* $a^{p-q}b^{q-p}\,(a^q+b^p)\left(\left(\frac{1}{a}\right)^q + \left(\frac{1}{b}\right)^p\right)^{-1}$
   m) $a^qb^p\left(\left(a^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\,b^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q$ *n)* $\left(\sqrt{a^p(b^q+a^{-p})}-1\right)\left(\sqrt{b^q(a^p+b^{-q})}+1\right)$

8. Compléter le carré, c'est-à-dire écrire les expressions suivantes sous la forme $a(x+b)^2+c$.
   a) x^2+x+1 *b)* $2x^2-12x+11$

9. Résoudre l'équation. (Chercher seulement les solutions réelles.)

   a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ *b)* $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$ *c)* $x^2 - x - 12 = 0$

   d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$ *e)* $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ *f)* $3\,|x - 4| = 10$

   g) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

10. Résoudre chaque inégalité. Écrire les réponses sous forme d'intervalles.

    a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ *b)* $x^2 < 2x + 8$ *c)* $x(x-1)(x+2) > 0$

    d) $|x - 4| < 3$ *e)* $\dfrac{2x-3}{x+1} \leq 1$

11. Ces équations sont-elles vraies ou fausses ? Pour chaque équation, le domaine des variables est supposé tel que tout soit bien défini.

    a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$ *b)* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ *c)* $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

    d) $\dfrac{1 + TC}{C} = 1 + T$ *e)* $(bc+1)\dfrac{a}{b} = \dfrac{(bc+1)ad}{bd}$ *f)* $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

    g) $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}} = \dfrac{1}{a-b}$ *h)* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

12. Vérifier les identités.

    a) $3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1} = 9\,(3^{2n+4} - 2^n) + 7 \cdot 2^n\,,\quad$ où $\;n \in \mathbb{N}$

    b) $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{7} a^k\right)(1-a) = (1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$

13. Soient $b > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Simplifier l'expression $A = \big(-b(-b^{-2})^m\big)^{-2m}$. Déterminer m pour que A soit égal à 16^5 lorsque $b = 2$.

Partie II : Trigonométrie.

Rappel : voici quelques identités trigonométriques remarquables :

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin(x) - \sin(y)$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

On montrera ces identités dans le Chapitre 2.

Si vous avez des difficultés avec cette partie, consultez l'annexe C du livre de Stewart.

1. Convertir de degrés en radians.

   a) $300°$ *b)* $-18°$

2. Convertir de radians en degrés.

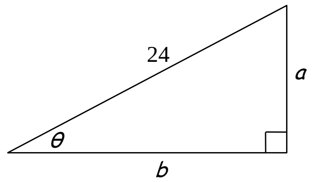
   a) $\frac{5\pi}{6}$ *b)* 2

3. Calculer la longueur de l'arc d'un cercle de 12 cm de rayon sous-tendu par un angle au centre de 30°.

4. Quelles sont les valeurs exactes ?

   a) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ *b)* $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ *c)* $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

5. Exprimer les longueurs a et b de la figure ci-dessous en termes de θ.



6. Calculer $\sin(x+y)$ sachant que $\sin(x) = \frac{1}{3}$, $\cos(y) = \frac{4}{5}$ et que x et y sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

7. Démontrer ces identités en supposant que tout soit bien défini.
   a) $\tan(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$ *b)* $\dfrac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2} = \sin(2x)$

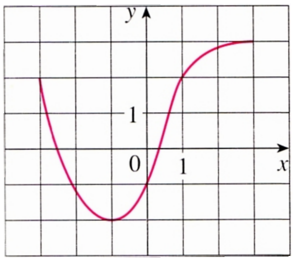
8. Chercher toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π telles que $\sin(2x) = \sin(x)$.

9. Dessiner le graphe de la fonction $y = 1 + \sin(2x)$ sans faire usage de la calculatrice.

Partie III : Fonctions réelles.

Si vous avez des difficultés avec cette partie, consultez les sections 1.1 à 1.3 du livre de Stewart.

1. La figure ci-dessous montre le graphe d'une fonction f.



   a) Quelle est la valeur $f(-1)$?
   b) Que vaut $f(2)$?
   c) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 2$?
   d) Chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
   e) Déterminer le domaine de définition et l'ensemble image de f.

2. Pour $f(x) = x^3$, calculer le quotient différentiel $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ et le simplifier.

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction.
   a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ *b)* $g(x) = \dfrac{x^{1/3}}{x^2+1}$ *c)* $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. Par quelles transformations du graphe de f obtient-on les graphes des fonctions suivantes ?
   a) $y = -f(x)$ *b)* $y = 2f(x) - 1$ *c)* $y = f(x-3) + 2$

5. Esquisser à la main et sans l'aide d'une calculatrice les graphes suivants.
   a) $y = x^3$ *b)* $y = (x+1)^3$ *c)* $y = (x-2)^3 + 3$ *d)* $y = 4 - x^2$
   e) $y = \sqrt{x}$ *f)* $y = 2\sqrt{x}$ *g)* $y = -2^x$ *h)* $y = 1 + x^{-1}$

6. Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
   a) Calculer $f(-2)$ et $f(1)$. *b)* Dessiner le graphe de f.

7. Soient $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$. Déterminer les fonctions suivantes.
   a) $f \circ g$ *b)* $g \circ f$ *c)* $g \circ g \circ g$

8. Soit $a, b > 0$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

   a) $\exp\big(\, p \log(a) + q \log(b) \,\big)$

   b) $\exp\big(\, p\big(\log(a) - \log(b)\big) + \log(b)(p + q) \,\big)$

   c) $\exp\big(\, p \log(ab^{-1}) + \log(b^{p+q}) \,\big)$

   d) $\exp\big(\, q \log(\tfrac{b}{a}) + \log(a^q) + p \log(a) \,\big)$

9. Pour chaque fonction f définie sur l'intervalle I, trouver le domaine de définition de la fonction réciproque f^{-1} et dessiner les graphes de f et f^{-1}.
   <u>*N.B.*</u> : Tous les domaines I sont choisis en sorte que la fonction réciproque existe.

   a) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$

   b) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

   c) $f(x) = \tan(x)$ sur $I = \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$

   d) $f(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

   e) $f(x) = e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$

   f) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

   <u>*Rappel*</u> : La fonction réciproque d'une fonction bijective $f \colon X \to Y$ fait correspondre à tout élément y de Y l'unique élément x de X qui est solution de l'équation $f(x) = y$. On a donc $f^{-1}(y) = x$.