Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.
Calculer les intégrales définies suivantes :

$(i)\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5\,dx \qquad (ii)\ \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx \qquad (iii)\ \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,dx$

Exercice 2.
Calculer les primitives suivantes :

$(i)\ \displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx \qquad (ii)\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx \qquad (a \neq 0)$

Exercice 3.
Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33}))\,\cos(x^{33})\,x^{32}\,dx\,.$$

Exercice 4.
Déterminer le type des intégrales généralisées I suivantes et les calculer :

$(i)\ \displaystyle I = \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}\,dx \qquad (iii)\ I = \int_0^\infty \sin(x)\,e^{-x}\,dx$

$(ii)\ \displaystyle I = \int_{1^+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx \qquad (iv)\ I = \int_{0^+}^\infty e^{-x}(1-x)\log(x)\,dx$

Exercice 5.
Calculer les primitives suivantes :

$(i)\ \displaystyle\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,dx \qquad (ii)\ \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad (iii)\ \int \frac{x^2-2}{x^3-x^2}\,dx \qquad (iv)\ \int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

Exercice 6.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a,b[\subset D$ (avec $a<b$).

Q1 : L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Q2 : Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que
$$S = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Q3 : Il existe $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

Exercice 7.
Soit $a > 0$ et $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ continue. À l'aide d'un changement de variables adéquat montrer que

(i) si f est paire, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

(ii) si f est impaire, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exercice 8.

Objectif: Primitives des développements limités
Théorie nécessaire: Proposition 9.32

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

(i) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \log(1+t^2)\,dt$ $\qquad$ (ii) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sin(t)}\,dt$

Exercice 9 (Décomposition en éléments simples : boss final)**.**
Calculer
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1} dx.$$

Indication : pour vous permettre de plus facilement trouver vos erreurs de calcul (si il y en a) voici quelques étapes intermédiaires :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 3x}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} dx = -\log(3)$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{4}{3}$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x^2 - x + 1} dx = \log\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x + 3dx = 3$$

Solution des exercices calculatoires et auto-évaluation

Exercice 1 (i) $\dfrac{8}{15}$

(ii) $4-2\sqrt{3}+\log\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}\right)$

(iii) $1-\sqrt{2}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3 0

Exercice 4 (i) 1

(ii) $\dfrac{8}{3}$

(iii) $\dfrac{1}{2}$

(iv) -1

Exercice 8 (i) $\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{10}x^5+\dfrac{1}{21}x^7+o(|x|^7)$

(ii) $x^2+\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{6}x^6+o(|x|^8)$.

Exercice 9 $\dfrac{13}{3}-\log(7)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$