



EPFL

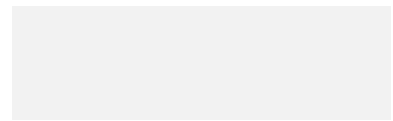
Ens: D. Strütt
Analyse I - (n/a)
16 janvier 2023
3h30

n/a

n/a

SCIPER : 999999

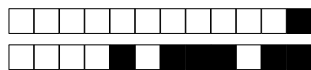
Signature:



Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 31 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n} \right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -3$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -14$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Question 2 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$

☐ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

☐ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$

☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq -1, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Alors :

☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

☐ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = -1$

☐ f est dérivable en $x = -1$ et continue en $x = 0$

☐ f n'est pas continue en $x = -1$

Question 4 : Soit $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

☐ $-2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$

☐ $-1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 1$

☐ $-\pi \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq -1$

☐ $0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 2$

Question 5 : L'intégrale $\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)} dx$ vaut

☐ 0

☐ $\sqrt{6} \arctan(\frac{1}{6})$

☐ $\text{Log}(3) - \text{Log}(2)$

☐ -1



Question 6 : Soit $f: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Soit I l'ensemble image de f . Alors :

☐ $I = [1, 1 + \frac{1}{\pi}]$

☐ $I = [2, 3]$

☐ $I = [1 - \frac{1}{\pi}, 1]$

☐ $I = [1, 2]$

Question 7 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

☐ $-1 < \alpha < 0$

☐ $\alpha < -1$

☐ $\alpha \geq 0$

☐ $\alpha < 0$

Question 8 : L'intégrale généralisée $\int_{0+}^1 \frac{\text{Log}(x)}{x^2} dx$

☐ converge et vaut -1

☐ converge et vaut $+1$

☐ converge et vaut -4

☐ diverge

Question 9 : Les nombres complexes $3, 1 - 2i$, et $1 + 2i$ sont les racines du polynôme

☐ $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$

☐ $z^3 - 2iz^2 + 45$

☐ $z^3 + 14z^2 + 15$

☐ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Question 10 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

☐ Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

☐ Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.

☐ Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.

☐ Si $a_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Question 11 : Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

☐ vaut $\frac{1}{2}$

☐ est infini

☐ vaut 1

☐ vaut 0

Question 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = (3n + 1)^{\text{Log}(\frac{1}{\sqrt{n}})}$. Alors :

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

**Question 13 :**

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est continue mais pas dérivable en $x = 0$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$

Question 14 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \operatorname{Log}(1+x)$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- ☐ $f(x) = x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{2} + o(|x|^3)$
- ☐ $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(|x|^3)$
- ☐ $f(x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2} + o(|x|^3)$
- ☐ $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(|x|^3)$

Question 15 : Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- ☐ la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$
- ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
- ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

Question 16 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(ax+b) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

- ☐ $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = -\frac{\pi}{4}$
- ☐ $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{4}$



Question 17 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Alors :

☐ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$

☐ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

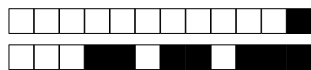
Question 18 : L'intégrale $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ vaut

☐ $2 - \frac{5}{e}$

☐ $2 - \frac{3}{e}$

☐ $2 - \frac{1}{e}$

☐ $2 - \frac{4}{e}$

**Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : L'intégrale $\int_{-1}^1 e^{-\sin(x)} dx$ vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f possède un développement limité d'ordre n autour de x_0 .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \frac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

☐ VRAI ☐ FAUX



Question 25 : Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0, 1]$. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 26 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 27 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☐

VRAI

☐

FAUX

Question 28 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐

VRAI

☐

FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 2 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂

Réservé au correcteur

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$





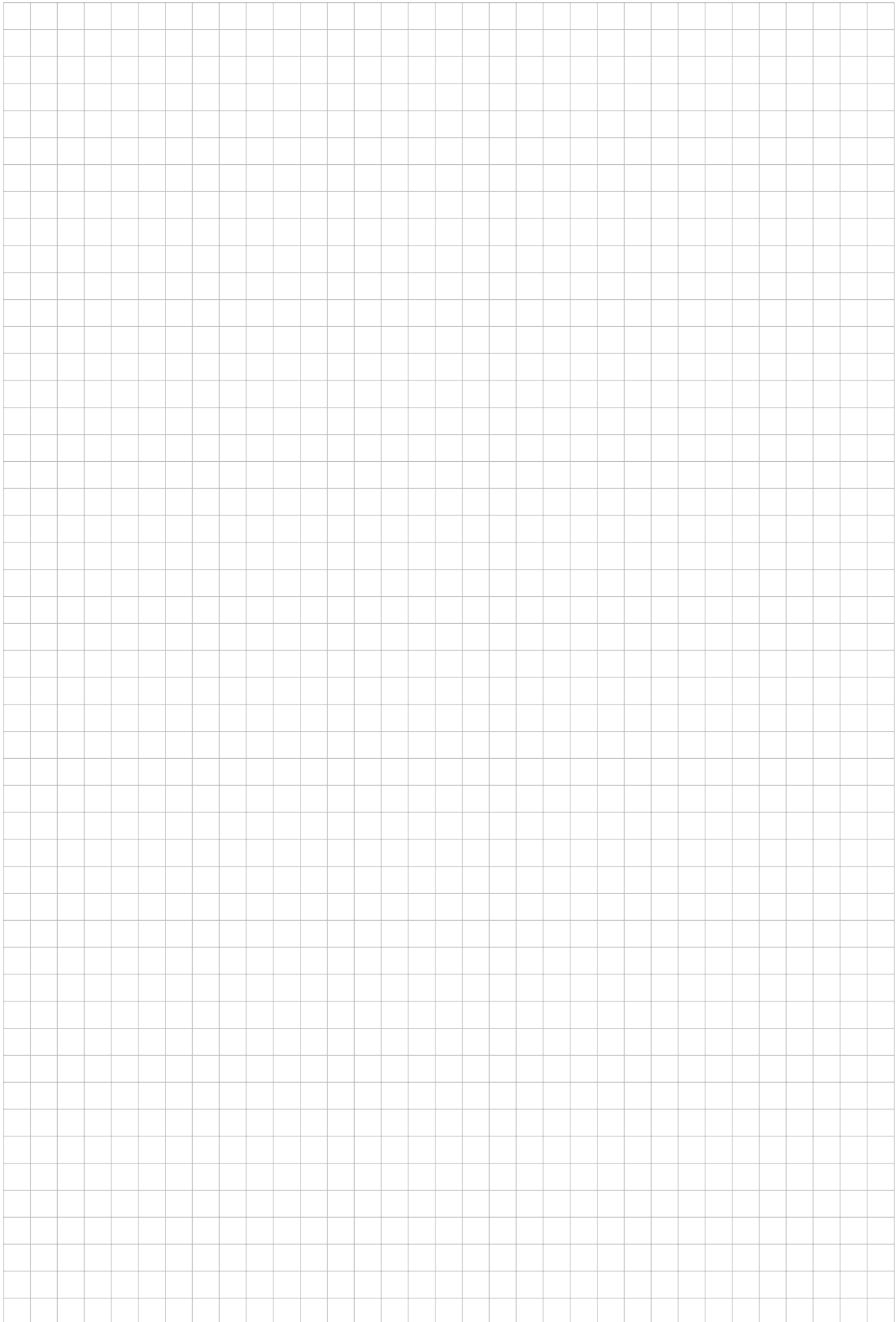
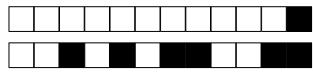
Question 30: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Réservé au correcteur

Montrer que si une suite converge, la limite est unique.







Question 31: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

Réservé au correcteur

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = xe^x - e^x.$$

- (a) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = (k-1)e^x + xe^x.$$

- (b) Écrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = 1$.

- (c) Donner le rayon de convergence de la série calculée au point (b). Justifier.



