



EPFL

Ens: P. Rügge-Reymond
Analyse I - (n/a)
11 janvier 2021
3 heures

n/a

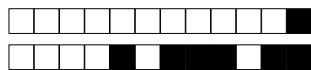
n/a

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

**Partie commune, 23 questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet en $x = 0$ un point de minimum local, on a :

☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$

☐ $f'(0) \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$

☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \geq 0$

☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \leq 0$

Question 2 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors :

☐ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = 1$

☐ f est dérivable à gauche en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$

☐ f est continue en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$

☐ f est dérivable à droite en $x = 0$ et dérivable à gauche en $x = 1$

Question 3 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$. Soit $f_1 = f$ et, pour tout $n \geq 2$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

☐ $f_n(x) = nx^3$

☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$

☐ $f_n(x) = (3x)^n$

☐ $f_n(x) = x^{(3^n)}$

Question 4 : Soit $c \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \quad a_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

☐ $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = +\infty$

☐ la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge pour exactement une valeur de c

☐ $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = c$

☐ la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ diverge quelle que soit la valeur de c



Question 5 : Soit $f:]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\text{Arctan}(x^2)}{x \sin(x)}$. Alors :

- ☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 0$.
☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 1$.
☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$.
☐ f n'admet pas de prolongement par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Question 6 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(x^2)$, et $I \subset \mathbb{R}$ son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

- ☐ $I = [0, +\infty[$ ☐ $I = [0, 1]$ ☐ $I = \mathbb{R}$ ☐ $I = [-1, 1]$

Question 7 : Soit A l'ensemble défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \text{Arctan}(\frac{1}{x}) < \frac{\pi}{4}\}$. Alors :

- ☐ $A =]0, 1[$ ☐ A n'est pas borné
☐ $A =]1, \frac{\pi}{2}[$ ☐ $\inf A = \frac{\pi}{2}$

Question 8 : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

- ☐ $b \leq 1$ ☐ $b \in]-1, 1[$ ☐ $b < 1$ ☐ $b \in]-1, 1]$

Question 9 : Soient a et b deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en $x = 0$. Alors :

- ☐ $f(-3) = \frac{3}{8}$ ☐ $f(-3) = -\frac{3}{8}$ ☐ $f(-3) = \frac{7}{8}$ ☐ $f(-3) = \frac{1}{4}$

Question 10 : Parmi les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{Arctan}(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont continues en $x = 0$?

- ☐ f et g ☐ ni f , ni g ☐ g , mais pas f ☐ f , mais pas g



Question 11 : L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$ vaut

☐ $\frac{3\pi}{2}$

☐ $-\pi$

☐ 2π

☐ 0

Question 12 : Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 (|z| - 2) = 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}.$$

Alors :

☐ $A \cap B$ contient deux points

☐ $A \cap B$ contient exactement un point

☐ $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

☐ $A \cap B$ est l'ensemble vide

Question 13 : La dérivée de la fonction $f(x) = (1 + x^2)^{1+x^2}$ au point $x = 1$ est égale à :

☐ $8(\operatorname{Log}(2) + 1)$

☐ 8

☐ 4

☐ $4(\operatorname{Log}(2) + 1)$

Question 14 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

Question 15 : Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$. Alors :

☐ $z^{14} \in \mathbb{R}$

☐ $\operatorname{Re}(z^8) > 0$

☐ $|z^6| > 73$

☐ $\operatorname{Im}(z^{11}) < 0$

Question 16 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors :

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais pas absolument

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument

Question 17 : Pour toute fonction $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0, 4]$ et dérivable sur $]0, 4[$, qui satisfait $f'(x) \geq 2$ pour tout $x \in]0, 4[$, on a :

☐ $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$

☐ $f(4) - f(1) \leq 4$

☐ $f(4) - f(0) \leq 1$

☐ $f(2) - f(0) \geq 4$



Question 18 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\sin(x))$, et $x_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre cinq de f autour de x_0 est donné par :

☐ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5R(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5R(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5R(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5R(x)$

Question 19 : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{4 + 3t}$, et $t_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre deux de f autour de t_0 est donné par :

☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{32}t^2 + t^2R(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}t - \frac{9}{64}t^2 + t^2R(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{64}t^2 + t^2R(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{128}t^2 + t^2R(t)$

Question 20 : L'intégrale généralisée $\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}} dx$

☐ converge et vaut $\frac{8}{3}$

☐ converge et vaut 4

☐ converge et vaut $\frac{16}{3}$

☐ diverge

Question 21 : L'intervalle de convergence I de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x+1)^n$ est donné par :

☐ $I =]-2, 0[$

☐ $I = [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

☐ $I =]-1, 1[$

☐ $I = \mathbb{R}$

Question 22 : L'intégrale $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$ vaut

☐ $3(2\sqrt{2} - 1)$

☐ $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

☐ $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

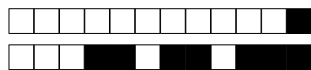
Question 23 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

**Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 24 : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur $]0, 1[$. Alors soit $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, soit $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = iy$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \geq 0$, $a_k \neq 0$, et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$. Alors la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soient g et h deux fonctions dérivables sur $] -1, 1[$, telles que $g(0) = h(0) = 0$, et $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$ n'existe pas.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX



Question 30 : Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2R(x)$. Alors le développement limité d'ordre deux de $g(x) = f(x)^3$ autour de zéro est donné par $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2R(x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 33 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.

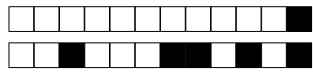
☐ VRAI ☐ FAUX

Question 34 : Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(b_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x) dx, \quad n \geq 1.$$

Alors $(b_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX



+1/8/53+