

Chapitre 7. Calcul intégral

§7.1 Intégrale d'une fonction continue.

Déf. Sommes de Darboux. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soit $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$.

Ex σ régulière d'ordre $n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + k \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$

Pas de subdivision $\mathcal{P}(\sigma) = \max \{x_i - x_{i-1}\}$

Alors $\boxed{\overline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})}$ où $M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

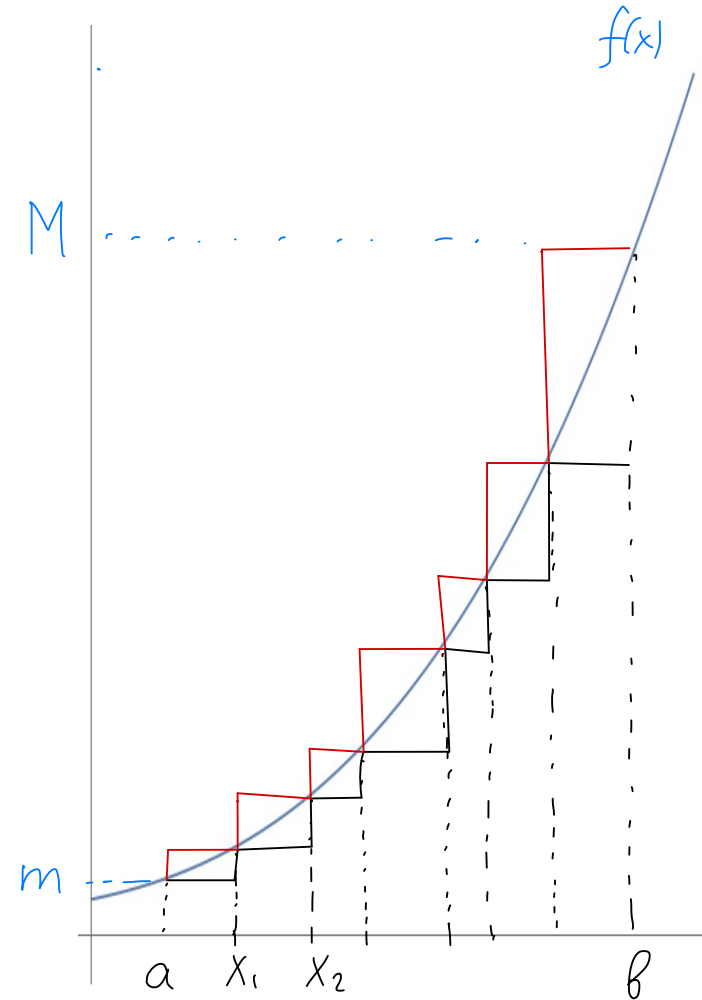
est la somme de Darboux supérieure de f relativement à σ .

$\boxed{\underline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})}$ où $m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

est la somme de Darboux inférieure de f relativement à σ .

$\sigma =$ subdivision de $[a, b]$

$$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad b = x_n$$



$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

$$\text{où } m = \min_{[a,b]} f(x)$$

$$M = \max_{[a,b]} f(x)$$

Remarque Si $\sigma_1 < \sigma_2 \leftarrow$ on ajoute des points

$$\Rightarrow \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

Proposition Soit $\overline{S}(f) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf \{ \overline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a,b] \}$

$$\underline{S}(f) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup \{ \underline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a,b] \}$$

Alors si f est continue sur $[a,b]$, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ [Voir DZ, § 7.1.5]

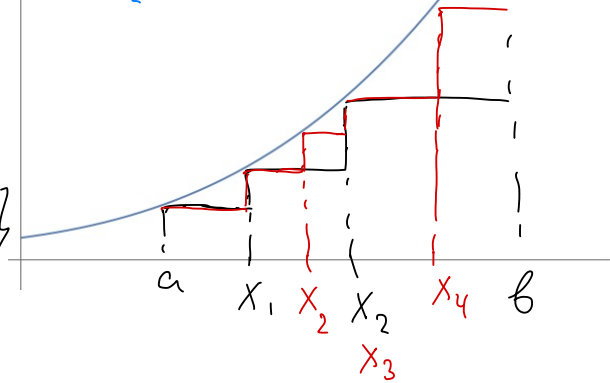
D\u00e9f $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a < b$. Alors

borne sup $\nearrow$ $\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ est l'int\u00e9grale de Riemann de la fonction f sur $[a,b]$.
 borne inf $\nearrow$ a $\nwarrow$ variable d'int\u00e9gration x

$$\sigma_1 = \{a, x_1, x_2, b\}$$

$$\sigma_2 = \{a, x_1, x_2, x_3, x_4, b\}$$

$$\underline{S}_{\sigma_2}(f) > \underline{S}_{\sigma_1}(f)$$



Déf Si $b < a \Rightarrow \int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{d'f}}{=} - \int_a^b f(x) dx$; $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Calcul d'intégrale: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f)$ où $\{\sigma_n\}$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que $P(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ex. $\int_0^3 x dx$ $\sigma_n = \{0, \frac{3}{n}, 2 \cdot \frac{3}{n}, \dots, (n-1) \frac{3}{n}, 3\}$ $x_k = k \cdot \frac{3}{n}$

$\max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{3k}{n}$; $\min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{3(k-1)}{n}$

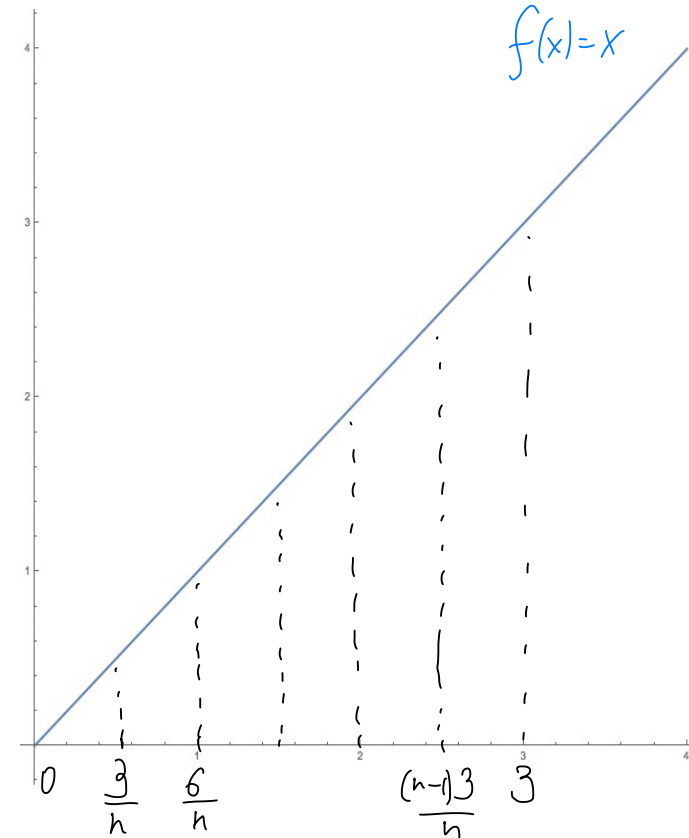
$\overline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3k}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$

$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3(k-1)}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{9}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n+1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n-1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$



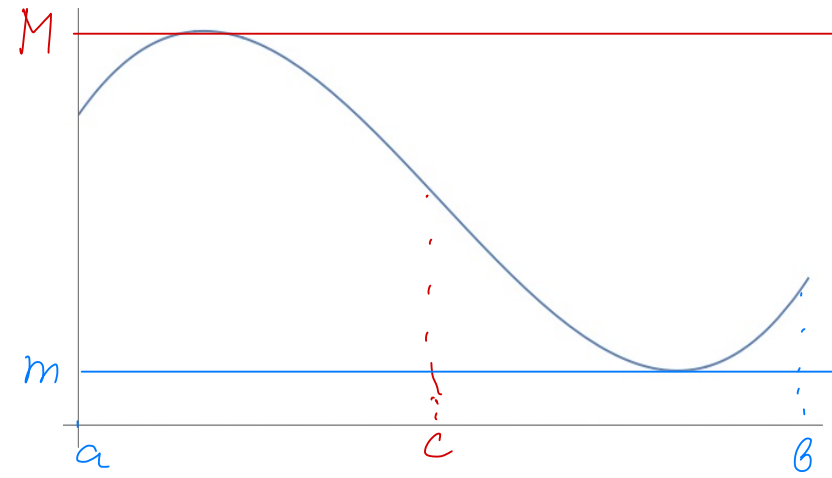
Propriétés. (1) $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$

Soit $c \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

(2) $m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$

où $m = \min_{[a, b]} f(x)$, $M = \max_{[a, b]} f(x)$ pour σ de $[a, b]$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$



(3) Théorème de la moyenne: $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$

Alors il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

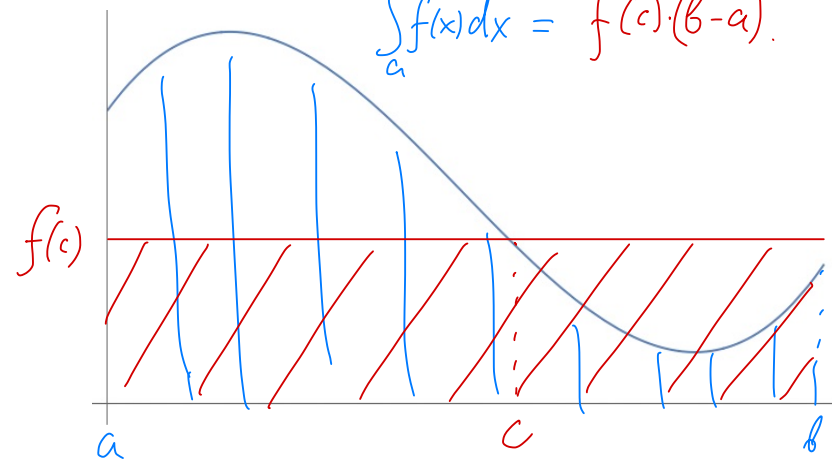
Dém: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ où

$m = \min_{[a, b]} f(x)$ $M = \max_{[a, b]} f(x)$

Aire sous la courbe = Aire du rectangle

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$



f est continue sur $[a, b] \Rightarrow$ Par $\mathcal{T} \mathcal{V} \mathcal{I}$ il existe $c \in [a, b]$
 $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx.$

§ 7.2. Relation entre l'intégrale et la primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$.

Rappel: Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue $f(x)$ sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $F'(x) = f(x) \forall x \in]a, b[$. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors $F_1(x) = F_2(x) + C$, $C \in \mathbb{R} \forall x \in [a, b]$.

Proposition. Soit $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$
 Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$ telle que $F(a) = 0$.

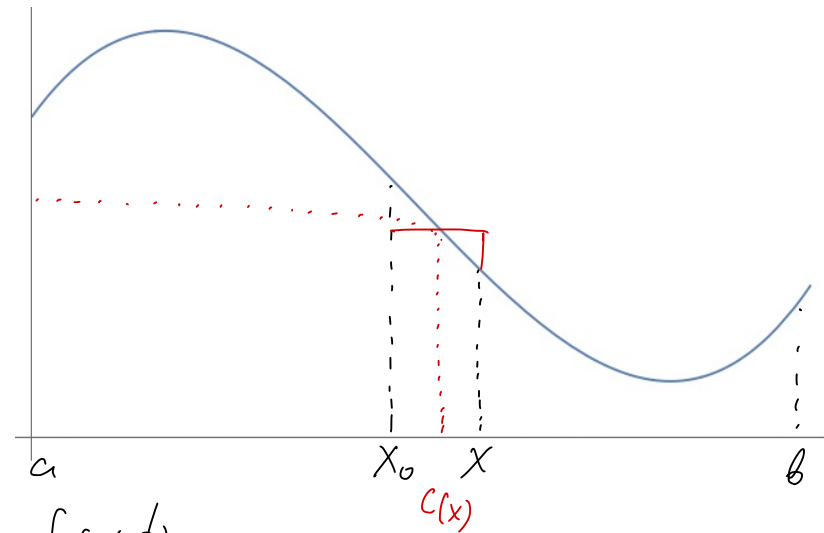
Dém: Soit $x_0 \in]a, b[$

$$\text{Considérons } \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) =$$

$$\frac{1}{(x-x_0)} \left(\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{(x-x_0)} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(c(x)) \text{ où } c(x) \text{ est un point entre } x_0 \text{ et } x.$$

Thm de la moyenne



$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c(x)) \stackrel{f \text{ continue}}{=} f(x_0).$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in]a, b[$$

Il faut aussi vérifier que $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) = 0$; $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b)$

[DZ, §7.1.13]

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \int_a^x f(t) dt = \underbrace{f(s(x))}_{\text{bornée}} \underbrace{(x-a)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0 = F(a) \\ &\quad \downarrow x \rightarrow a^+ \quad \uparrow \text{Thm de la moyenne} \quad \downarrow 0 \\ &\quad F(a) \quad \quad \quad s(x) \text{ entre } a \text{ et } x \end{aligned}$$

Corollaire. Théorème fondamental du calcul intégral.

Soit $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$. Si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$,

alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Dém: On sait que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$.

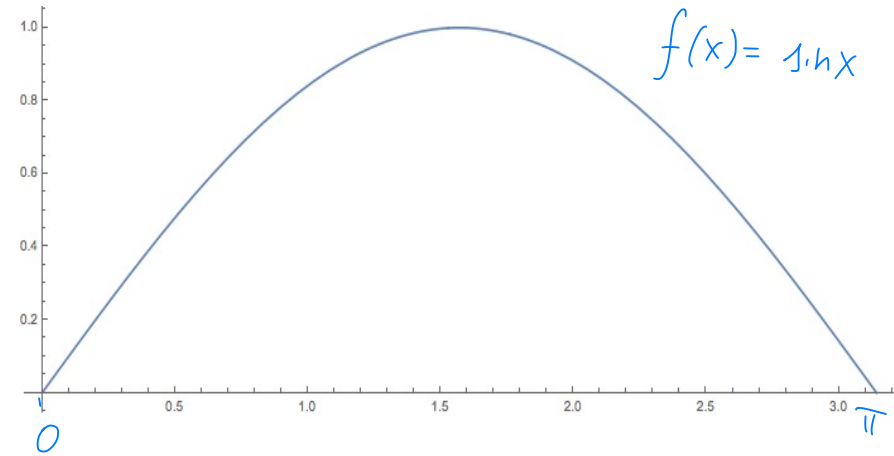
$$\begin{aligned} \text{Alors } F(x) &= G(x) + C \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \\ &= \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} = \int_a^b f(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ou $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et $F(x)$ est une primitive de f sur $[a, b]$

$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$
$\sinh x$	$-\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\log a} a^x + C$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\log x + C$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + C$

Ex. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$
 $= 1 + 1 = 2$



Propriétés (1) Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$

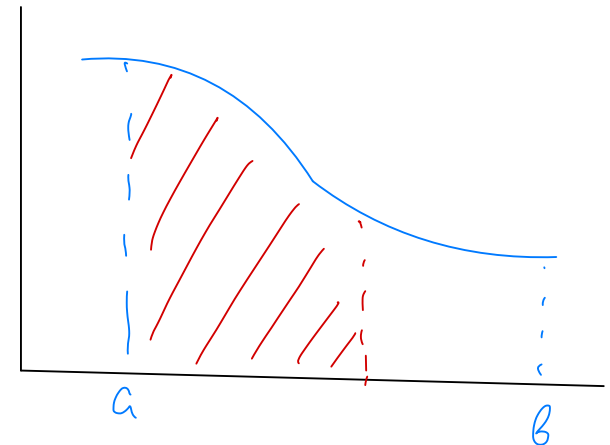
puisque $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

(2) Si $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$, $c \in]a, b[$.

$\Rightarrow 0 \leq \int_a^c f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx$

(Puisque $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est croissante sur $[a, b]$
 et $F(a) = 0 = \int_a^a f(t) \, dt$)

$\Rightarrow$ Si $f(x) \geq 0$, Alors $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$



(3) Corollaire : Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. -2/0-

(4) Intégrale fonction de ces bornes.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $g, h : I \rightarrow [a, b]$ dérivables sur I

Alors
$$\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Démo:
$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \int_{h(x)}^a f(t) dt + \int_a^{g(x)} f(t) dt = \int_a^{g(x)} f(t) dt - \int_a^{h(x)} f(t) dt = F(g(x)) - F(h(x)).$$

où $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = F'(g(x)) \cdot g'(x) - F'(h(x)) \cdot h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x). \quad \square$$

Ex.
$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{3x^2+x} e^{t^2} dt \right) = e^{(3x^2+x)^2} \cdot (6x+1) - e^{\underbrace{1}_{=0}} \cdot \underbrace{(1)'}_{=0} = e^{(3x^2+x)^2} (6x+1).$$

§ 7.3. Techniques d'intégration

Proposition. Formule de changement de variable.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ continûment dérivable sur $I = [\alpha, \beta]$

Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad \text{ou } x = \varphi(t)$$

Ex 1. 1^{ère} méthode $\int_1^2 x e^{x^2} dx = \int_1^4 \cancel{\sqrt{t}} e^t \frac{1}{2\cancel{\sqrt{t}}} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e).$

Soit $x = \sqrt{t} = \varphi(t) : [1, 4] \rightarrow [1, 2]$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

2^{ème} méthode $\int_1^2 \underbrace{x}_{\frac{1}{2} du} e^{\underbrace{x^2}_{=u}} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e).$

Soit $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ $x \in [1, 2] \Rightarrow u = x^2 \in [1, 4]$