1 Changement d'Indice de Sommation

Le changement d'indice de sommation est expliqué à différentes occasions sur Internet.

https://fr.wikiversity.org/wiki/Sommation/Changement_d%27indice

Je vous propose une explication vulgarisée basée sur l'exercice 4 (ii)) de la série 4, à savoir le binôme de Newton.

Durant l'étude de l'hérédité, nous arrivons à

$$\begin{aligned} &(x+y)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} \end{aligned} \tag{1}$$

A ce stade, le plus simple serait que les deux sommes portent sur des "x" et des "y" de mêmes exposants, afin de pouvoir fusionner les deux sommes. Cela est possible en faisant un changement d'indice de sommation.

"k", dans la somme ci-dessus, est ce qu'on appelle un indice muet: il ne joue aucun rôle spécifique si ce n'est qu'il indexe les termes de la somme d'une certaine manière. La première somme aurait pu être écrite lourdement par: $\binom{n}{0} x y^n + \binom{n}{1} x^2 y^{n-1} + ...$, mais pour l'écrire de manière plus compacte, on utilise cet indice k.

Si cela nous simplifie la vie, nous pouvons donc changer d'indice de sommation. Celui que nous allons faire ici est $j = k+1$ (vous allez voir pourquoi tout de suite). k allait de 0 à n, j va donc de $0+1 = 1$ à $n+1$. De plus, $k = j-1$ d'après notre définition de j. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{j} y^{n-(j-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{j} y^{n+1-j} \end{aligned} \tag{2}$$

j est muet comme l'était k, donc (pour raison de forme uniquement), on peut renommer j en k.

La somme de sommes présentée au début devient donc $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$. Miracle, les "x" et les "y" de chaque somme ont désormais les mêmes exposants, il sera donc facile de combiner les sommes. Il ne reste en effet plus qu'un petit obstacle (qui n'a rien à voir avec le changement d'indice): une des sommes va de 1 à n+1, l'autre de 0 à n. Pour contourner cet obstacle, vous avez deux choix:

1) élargir les deux sommes en prenant par convention $\binom{m}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > m$.

2) mettre de côté le terme n+1 de la première somme et le terme 0 de la seconde, que vous réajouterez à la fin:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^{0} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} \right) + \binom{n}{0} x^{0} y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n+1-k} \right) + y^{n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

On peut maintenant fusionner les deux sommes :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}\tag{4}$$

d'après la formule donnée plus tôt dans cet exercice. La somme recherchée au départ est donc

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1}\\
&=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}+y^{n+1}
\end{aligned}\tag{5}$$

Or, $x^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^{n+1-(n+1)}$ et $y^{n+1}=\binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1-0}$. On retombe donc bien sur

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}\tag{6}$$

Le changement d'indice de sommation utilisé plus haut est un simple décalage d'un rang. Comme vous pourrez le voir à d'autres occasions, on peut décaler de plusieurs rangs, ou même faire des changements d'indices plus compliqués. Je vous invite à vous exercer à jouer avec des sommes et voir si vous êtes à l'aise avec ces notions, avec la séparation de sommes, etc.