

Analyse I

Résumé: Séries entières.

Définitions et résultats.

1. (Série entière). L'expression

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

où $a_1, a_2, \dots, x_0 \in \mathbb{R}$ et x est une variable réelle, est dite une série entière. L'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge}\}$ est son domaine de convergence.

2. Théorème (Rayon de convergence).

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ une série entière. Alors il existe $r : 0 \leq r \leq \infty$ tel que

- la série converge absolument pour tout $x : |x - x_0| < r$,
- la série diverge pour tout $x : |x - x_0| > r$.

Alors r est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. La convergence de la série entière pour $x = x_0 \pm r$ doit être analysée séparément.

3. (Calcul du rayon de convergence).

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

- (a) Supposons que $a_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$ tel que $0 \leq l \leq \infty$.

$$\text{Alors } r = \frac{1}{l}.$$

- (b) Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = l$ tel que $0 \leq l \leq \infty$. Alors $r = \frac{1}{l}$.

(par convention on suppose que si $l = 0$, alors $r = +\infty$, et si $l = +\infty$, alors $r = 0$.)

Remarque: on peut remplacer $\lim_{k \rightarrow \infty}$ par $\limsup_{k \rightarrow \infty}$.

4. (Série de Taylor).

Soit $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I , et $x_0 \in I$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

est la série de Taylor de f au point x_0 .

Si $x_0 = 0$, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

est dite la série de MacLaurin de f .

5. (Primitive d'une fonction définie par une série entière).

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ une fonction définie par la série entière.

- (a) Les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ ont le même rayon de convergence r .
- (b) Si $r > 0$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ est continue sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.
- (c) Si $r > 0$, alors $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, telle que $F(x_0) = 0$.
6. (Dérivée d'une fonction définie par une série entière)
Les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence r . Si $r > 0$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ est continûment dérivable et $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.
7. Les séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon, mais pas forcément le même intervalle de convergence.

Séries de Taylor de quelques fonctions et leurs domaines de convergence.

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ pour tout $x \in]0, 2]$.
3. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ pour tout $x \in]-1, 1]$.
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
5. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
9. $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
10. $(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!}x^k = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ pour tout $x \in]-1, 1[$, $m \in \mathbb{R}$.