

Analyse I – Série 7

Exercice 1. (Critères de convergence)

Objectif: Comparer l'efficacité et l'applicabilité des deux critères de convergences.

Théorie nécessaire: Critères de convergences des séries, cours 11

(a) Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

i) le critère de d'Alembert,

ii) le critère de Cauchy.

(b) Discuter la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ en utilisant

i) le critère de d'Alembert,

ii) le critère de Cauchy.

Exercice 2. (Convergence des séries)

Objectif: Appliquer les critères de convergence pour déterminer si les séries convergent ou divergent

Théorie nécessaire: Critères de convergences vus au cours 11

Déterminer si la série donnée converge ou diverge :

$$\begin{array}{llll} i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5} \right)^n & ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} & iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} & iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - n \right) \\ v) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right) & vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} & & vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} \end{array}$$

Exercice 3. (Suites des sommes partielles.)

Objectif: Trouver les sommes des séries données explicitement

Théorie nécessaire: Formules des sommes télescopiques données ci-dessous

Calculer les sommes des séries suivantes en utilisant les suites des sommes partielles:

$$\begin{array}{ll} i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \\ iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} & \end{array}$$

Astuce: Pour le i), utiliser l'identité $\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver des identités similaires pour ii) et iii).

Exercice 4. (Convergence des séries avec un paramètre)

Objectif: Appliquer les critères de convergence connus pour déterminer la convergence de la série en fonction de la valeur du paramètre

Théorie nécessaire: Critères de convergences vus au cours 11

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c} \right)^n$ avec $c \neq 1$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right)^n$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

Quelle est la somme de la série iii) lorsqu'elle converge?

Exercice 5. (Suite des sommes partielles)

Objectif: Calculer la somme de la série donnée suivant l'astuce donnée

Théorie nécessaire: Méthode proposée dans i)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}.$$

i) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.

ii) En déduire la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

Exercice 6. (Critères de convergence)

Objectif: Comprendre la raison pour les critères de Cauchy et de d'Alembert

Théorie nécessaire: Critères de Cauchy et de d'Alembert vus au cours 11

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de d'Alembert et de Cauchy pour cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Exercice 7. (Application des critères de convergence)

Objectif: Choisir un critère de convergence convenable et déterminer si la série donnée converge ou diverge

Théorie nécessaire: Critères de convergences vus au cours 11

Etudier la convergence des séries suivantes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n n^b$ avec $|q| \neq 1, b > 0$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{8}{7}}}$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} + n^{\frac{3}{5}}}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^p}$ avec $a > 0, p \in \mathbb{N}^+$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$ où $P(x)$ est un polynôme tel que

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x > n_0, P(x) \neq 0$.

Exercice 8. (Critère de condensation)

Objectif: Appliquer le critère de condensation dans le cas proposé

Théorie nécessaire: Critères de condensation donné ci-dessous

Critère: Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs et décroissantes: $\forall n \in \mathbb{N}^+, a_n > 0$ et $a_{n+1} \leq a_n$.

Alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ convergent ou divergent en même temps. (Voir le corrigé pour une démonstration).

Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge pour tout $p > 1$ en utilisant le critère de condensation.