Anna Lachowska

Analyse I – Série 3

Exercice 1. (V/F : Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant l'infimum et le supremum des ensembles
Théorie nécessaire: Définitions et exemples donnés au cours 3
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Q1 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

Q2 : Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$.

Q3 : Si $\sup A \in A$ et $\inf A \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert.

Q4 : Si $\sup A = \inf A$, alors A est un point.

Q5 : Si A est minoré, alors $\inf A \notin A$.

Q6 : Si A est majoré, alors $\max A$ existe.

Nombres complexes.

Exercice 2. (V/F: Formule d'Euler)

Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés sur les nombres complexes en utilisant la formule d'Euler
Théorie nécessaire: Formule d'Euler donnée au cours 4

$Q1: \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad Q2: \quad e^{-i\pi} = -1$ $\qquad Q3: \quad \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

Exercice 3. (Forme polaire)

Objectif: Comprendre la relation entre la forme cartesienne et la forme polaire d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Définition de la forme polaire donnée au cours 4
Calculer le module des nombres complexes suivants :

$i)\ e^{i+1}$ $\qquad ii)\ e^{-(i+1)}$ $\qquad iii)\ e^{-(i-1)}$ $\qquad iv)\ e^{(i-50)}$

$v)\ e^{(1-50i)}$ $\qquad vi)\ \cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)$

Exercice 4. (Partie réelle et partie imaginaire)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques convenables pour trouver la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Propriétés des nombres complexes données au cours 4
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

i) $(2-3i)(3+2i)$ *ii)* $\dfrac{2-3i}{3+2i}$ *iii)* $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{19}$

iv) $(1-i\sqrt{3})^{10}$ *v)* $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{1+3i}$ *vi)* $\dfrac{2-3i}{2+i}+\dfrac{1-i}{1+3i}$

vii) e^{6+3i} *viii)* $e^{2i}+e^{3i}$ *ix)* $(e^{1-3i})\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Exercice 5. (Module et argument)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques convenables pour trouver le module et l'argument d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Propriétés des nombres complexes données au cours 4
Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

i) $2+2i$ *ii)* $-e^{i}+i\sqrt{3}$ *iii)* $-1+i\tan(3)$

iv) $\dfrac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$ *v)* $e^{\pi+i\pi}+1$ *vi)* $\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5)$

Exercice 6. (Racines de nombres complexes)

Objectif: Trouver des racines d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Formule de Moivre et proposition sur les racines des nombres complexes données au cours 5
Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^5=-1$ *ii)* $z^2=-3-3i$ *iii)* $z^2=5+2\sqrt{6}i$ *iv)* $z^4=-2i$
v) $z^3=-\sqrt{3}+i$

Exercice 7. (Equations polynomiales)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour résoudre des équations polynomiales
Théorie nécessaire: Théorème fondamental de l'algèbre et ses consequences données au cours 5
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

i) $z^2+6z+12-4i=0$ *ii)* $z^6+4z^3+2=0$

Exercice 8. (Encore une équation)

Objectif: Trouver des racines d'un nombre complexe
Théorie nécessaire: Proposition sur les racines des nombres complexes donnée au cours 5

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2=\left(1+\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8 .$$

Exercice 9. (Décomposition d'un polynôme)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour décomposer un polynôme
Théorie nécessaire: Théorème fondamental de l'algèbre et ses consequences données au cours 5
Décomposer le polynôme $z^6 + 8$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réelles.

Exercice 10. (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Objectif: Appliquer les transformation algébriques et propriétés des nombres complexes pour établir l'égalité des sous-ensembles
Théorie nécessaire: Exemples des sous-ensembles de nombres complexes donnés à la fin du cours 5
Démontrer l'égalité suivante :

$$\left\{z \in \mathbb{C}:\ z \neq 0,\ z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \{z \in \mathbb{C}:\ z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0, \text{ ou } |z| = 1\}\ .$$

Exercice 11. (V/F : Nombres complexes)
Objectif: Interpréter et évaluer les énoncés concernant les nombres complexes
Théorie nécessaire: Formule de Moivre et propriétés des polynômes complexes données au cours 5

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.

Q2 : Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2 + 2i\sqrt{3})^n$ soit réel.