EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
19 septembre 2024

Analyse I – Série 2

Remarque générale :
Les Exercices 1, 4 et 8 sont des questions de type Vrai ou Faux (V/F) – ce type de questions réapparaîtra tout au long du semestre. Pour chaque question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1. (V/F: Ensembles)

Objectif: Interprêter et évaluer les énoncés concernant les réunions, intersection et différences des ensembles
Théorie nécessaire: Définitions et exemples donnés au cours 2 sur les opérations ensemblistes

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.
On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B, $A \cap B$ pour leur intersection, et $A \cup B$ pour leur réunion, c.-à-d.

$$A\setminus B = \{x \in A : x \notin B\}, \qquad A\cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}, \qquad A\cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Q1 : $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$

Q2 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Q3 : $(A \cap B) \setminus C = A \cap (C \setminus B)$

Q4 : $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$

Q5 : $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 2. (Nombres irrationnels)

Objectif: Construire une démonstration suivant le schema proposée au cours
Théorie nécessaire: Démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel donnée au cours 2

Montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3. (Nombres irrationnels)

Objectif: Appliquer les transformations algébriques convenables pour démontrer qu'un nombre est irrationnel
Théorie nécessaire: Démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel donnée au cours 2

Démontrer que les nombres réels r suivants sont irrationnels:

i) $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ *ii)* $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Exercice 4. (V/F : Infimum et supremum)

Objectif: Interprêter et évaluer les énoncés concernant les notions de sup et inf d'un sous-ensemble des nombres réels.
Théorie nécessaire: Définitions de sup et inf données à la fin du cours 2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Q1 : Si $\sup A$ n'existe pas, alors A n'est pas borné.

Q2 : Si $\sup A \notin A$, alors A n'est pas borné.

Q3 : L'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 4,\ x \in \mathbb{Q}\}$ n'admet pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

Q4 : Soit $B \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide. Si $\inf A < \inf B$ et $\sup A > \sup B$, alors $B \subset A$.

Exercice 5. (Notation des intervalles)

Objectif: S'habituer aux notations des intervalles
Théorie nécessaire: Liste des notations des intervalles donnée au cours 3

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$

v) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$

vi) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Exercice 6. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un sous-ensemble des nombres réels.
Théorie nécessaire: Définitions de sup et inf et l'exemple donné à la fin du cours 2

Soit $E \subset \mathbb{R}$ donné par $E = \left\{\frac{1}{n+3} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Q1 : Montrer que E est borné.

Q2 : Trouver l'infimum et le supremum de E.

Q3 : étudier si $\sup E \in E$ et $\inf E \in E$.

Exercice 7. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Objectif: Trouver l'infimum et le supremum d'un sous-ensemble des nombres réels.
Théorie nécessaire: Définitions d'un majorant, un minorant, sup et inf données à la fin du cours 2

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré ou minoré dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble est majoré, trouver son supremum et s'il est minoré, trouver son infimum. Dans chaque cas, étudier si le supremum (l'infimum) appartient à l'ensemble.

i) $A =]-1, \sqrt{2}\,]$

ii) $B =]\sqrt{2}, \infty\,[$

iii) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 1\}$

iv) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2| < 1\}$

v) $E = \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

vi) $F = \left\{\dfrac{n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

vii) $G = \mathbb{Q}$

viii) $H = \left\{\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

ix) $I = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$

Exercice 8*. (Coupure de Dedekind). **Cet exercice est facultatif.**
Théorie nécessaire: Axiome de la borne inférieure donné au cours 2

Démontrer que la propriété suivante est équivalente à l'axiome de la borne inférieure (voir les notes du cours 2):
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides tels que $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \emptyset$. Supposons aussi que $a < b$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Alors il existe un élément $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq c$ pour tout $a \in A$ et $c \leq b$ pour tout $b \in B$.