



Ens: S. Friedli
Analyse I - (n/a)
17 janvier 2022
3 heures

n/a

n/a

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages (les dernières pouvant être vides), et 33 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question [QCM-complexes-B] : Soit $z = \frac{2i^9 - 4i^{15}}{1 - i}$. Alors:

☒ $z^6 = 8 \cdot 3^6 i$

☐ $z^6 = 8 \cdot 3^6$

☐ $z^6 = 8 \cdot 3^6(1 + i)$

☐ $z^6 = -8 \cdot 3^6 i$

Question [QCM-cont-vs-derivab-A] : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin(x)$, et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors au point $y_0 = f(\pi)$:

☒ $(f^{-1})'(y_0) = 1$

☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{3}$

☐ f^{-1} n'est pas dérivable

☐ $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2\pi - 1}$

Question [QCM-contin-deriv-C1-B] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

Alors:

☒ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$

☐ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$

☐ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$

☐ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$

Question [QCM-dev-limite-A] : Soit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$ autour de $x_0 = 0$. Alors a_3 est égal à:

☒ 0

☐ $\frac{1}{6}$

☐ 1

☐ $\frac{1}{2}$

Question [QCM-dev-limite-B] : Le développement limité d'ordre deux de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$ est:

☒ $f(x) = e + ex + \frac{3}{2}ex^2 + x^2\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = e + ex + 3ex^2 + x^2\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = \frac{5}{2} + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question [QCM-inf-sup-A] : Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } y = e^{-x}\}$. Alors

☒ $\text{Sup } A = 1$

☐ A n'est pas majoré

☐ $\text{Inf } A = 1$

☐ $\text{Sup } A = e$

Question [QCM-int-generalisee-B] : L'intégrale généralisée $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} dx$

☒ diverge

☐ converge et vaut -1

☐ converge et vaut 1

☐ converge et vaut 0

CATALOGUE

Question [QCM-integrale-first-B] : L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+3)} dx$ vaut:

☒ $\frac{1}{3} \operatorname{Log}(2) - \frac{1}{6} \operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

☐ $\operatorname{Log}(4) + \operatorname{Log}\left(\frac{7}{2}\right)$

☐ $\frac{1}{3} \operatorname{Log}(2) - \frac{1}{9} \operatorname{Log}\left(\frac{7}{4}\right)$

☐ $\operatorname{Log}(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}(2)$

Question [QCM-integrale-second-B] : L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$ vaut:

☒ $e - 1$

☐ 1

☐ 0

☐ e

Question [QCM-limit-prolongmt-B] : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 10x - 15}{x^2 - x - 6} & \text{si } x > 3, \\ a & \text{si } x = 3, \\ bx^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $[0, +\infty[$ pour:

☒ $a = 4, b = \frac{1}{3}$

☐ $a = 0, b = -\frac{1}{9}$

☐ $a = 5, b = \frac{4}{9}$

☐ $a = 4, b = 3$

Question [QCM-limsup-liminf-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}.$$

Alors :

☒ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

☐ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Question [QCM-serie-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $a_n = \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est:

☒ absolument convergente

☐ convergente mais pas absolument convergente

☐ divergente car $|a_n| \rightarrow +\infty$

☐ divergente car $|a_n| \rightarrow 1$

CATALOGUE

Question [QCM-serie-entiere-B] : La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+4}} (x+1)^n$ converge si et seulement si $x \in I$, où:

☒ $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}[$ ☐ $I =]-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ ☐ $I = [-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$ ☐ $I =]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$

Question [QCM-serie-parametre-D-bis] : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=2}^{\infty} t^n$. Alors:

☒ $f'(\frac{1}{2}) = 3$ ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 7$ ☐ $f'(\frac{1}{2}) = -5$ ☐ $f'(\frac{1}{2}) = 0$

Question [QCM-suites-convergence-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = e^{-n} e^{n^2 \text{Log}(1+\frac{1}{n})}$. Alors:

☒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$

Question [QCM-suites-recurrence-A] : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + 2$. Alors:

☒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$ ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$
☐ $(x_n)_{n \geq 0}$ diverge ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$

Question [QCM-theo-accr-finis-B] : Soit $I = [-3, 0]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3e^{\frac{x+3}{3}} - 2$. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a:

☒ $1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3$ ☐ $3 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 3e$
☐ $2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq e$ ☐ $-\infty < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$

Question [QCM-val-intermed-image-interv-B] : Soit $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \cos(x)$. Alors l'ensemble image de f est égal à

☒ $[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(\frac{\pi}{4})]$ ☐ $[0, 1]$ ☐ $]0, 1]$ ☐ $]0, \exp(\frac{\pi}{4})]$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-derivabilite-discussion-A] : Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(-1) = f(1)$. Alors il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-dev-limite-A] : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ le développement limité de f d'ordre n autour de zéro, où $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est un polynôme. Alors

$$f'(0) = p'_n(0), \quad f^{(2)}(0) = p_n^{(2)}(0), \quad f^{(3)}(0) = p_n^{(3)}(0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-fonction-etc-A] : Il existe une fonction bijective et continue $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-induction-suites-limites-B] : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-inf-sup-B] : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, et soit $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Si A est majoré, alors B est majoré.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-integrale-B] : Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

☐ VRAI ☒ FAUX

CATALOGUE

Question [TF-limites-continuite-A] : Il existe une fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-serie-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-serie-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-serie-entiere-B] : Si la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-3)^k$ converge pour $x = 2.8$, alors elle converge aussi pour $x = 3.1$.

☒ VRAI ☐ FAUX