



Ens: A. Lachowska
Analyse I - (n/a)
11 janvier 2021
3 heures

n/a

n/a

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		

Partie commune, 23 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question [QCM-complexes-A] : Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$. Alors :

- ☐ $|z^6| > 73$ ☐ $z^{14} \in \mathbb{R}$ ☐ $\operatorname{Re}(z^8) > 0$ ☒ $\operatorname{Im}(z^{11}) < 0$

Question [QCM-complexes-B] : Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^2(|z| - 2) = 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}.$$

Alors :

- ☒ $A \cap B$ contient deux points
☐ $A \cap B$ est l'ensemble vide
☐ $A \cap B$ contient exactement un point
☐ $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

Question [QCM-contin-deriv-C1-B] : Soient a et b deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en $x = 0$. Alors :

- ☐ $f(-3) = \frac{1}{4}$ ☐ $f(-3) = -\frac{3}{8}$ ☒ $f(-3) = \frac{7}{8}$ ☐ $f(-3) = \frac{3}{8}$

Question [QCM-contin-vs-derivab-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est continue en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
☐ f est dérivable à gauche en $x = 0$ et dérivable en $x = 1$
☒ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = 1$
☐ f est dérivable à droite en $x = 0$ et dérivable à gauche en $x = 1$

Question [QCM-derivee-B] : La dérivée de la fonction $f(x) = (1 + x^2)^{1+x^2}$ au point $x = 1$ est égale à :

- ☒ $8(\log(2) + 1)$ ☐ $4(\log(2) + 1)$ ☐ 4 ☐ 8

CATALOGUE

Question [QCM-dev-limite-A] : Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{4+3t}$, et $t_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre deux de f autour de t_0 est donné par :

☒ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{128}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}t - \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐ $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{32}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

Question [QCM-dev-limite-B] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\sin(x))$, et $x_0 = 0$. Alors le développement limité d'ordre cinq de f autour de x_0 est donné par :

☒ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐ $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

Question [QCM-induction-B1] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$. Soit $f_1 = f$ et, pour tout $n \geq 2$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

☒ $f_n(x) = x^{(3^n)}$

☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$

☐ $f_n(x) = (3x)^n$

☐ $f_n(x) = nx^3$

Question [QCM-inf-sup-B] : Soit A l'ensemble défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \text{Arctg}(\frac{1}{x}) < \frac{\pi}{4}\}$. Alors :

☒ A n'est pas borné

☐ $A =]1, \frac{\pi}{2}[$

☐ $\inf A = \frac{\pi}{2}$

☐ $A =]0, 1[$

Question [QCM-int-generalisee-B] : L'intégrale généralisée $\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}} dx$

☒ converge et vaut $\frac{16}{3}$

☐ converge et vaut 4

☐ converge et vaut $\frac{8}{3}$

☐ diverge

Question [QCM-integrale-second-A] : L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$ vaut

☒ 2π

☐ $-\pi$

☐ $\frac{3\pi}{2}$

☐ 0

Question [QCM-integrale-second-B] : L'intégrale $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$ vaut

☒ $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

☐ $3(2\sqrt{2}-1)$

☐ $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Question [QCM-limite-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

☒ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

CATALOGUE

Question [QCM-limite-prolongmt-A] : Soit $f:]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\text{Arctg}(x^2)}{x \sin(x)}$. Alors :

- ☒ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 1$.
☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = 0$.
☐ f admet un prolongement par continuité en $x = 0$, noté $\hat{f}$, et $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$.
☐ f n'admet pas de prolongement par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Question [QCM-limite-prolongmt-D] : Parmi les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{Arctg}(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont continues en $x = 0$?

- ☐ f et g ☐ f , mais pas g ☒ g , mais pas f ☐ ni f , ni g

Question [QCM-minmax-A] : Pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet en $x = 0$ un point de minimum local, on a :

- ☒ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \geq 0$ ☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$
☐ $f'(0) \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$ ☐ $f'(0) = 0$ et $f''(0) \leq 0$

Question [QCM-serie-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors :

- ☒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge, mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais pas absolument ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Question [QCM-serie-entiere-A] : L'intervalle de convergence I de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x+1)^n$ est donné par :

- ☐ $I = \mathbb{R}$ ☐ $I = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ☐ $I =]-1, 1[$ ☒ $I =]-2, 0[$

Question [QCM-serie-parametre-B] : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

- ☒ $b \in]-1, 1[$ ☐ $b \in]-1, 1]$ ☐ $b < 1$ ☐ $b \leq 1$

CATALOGUE

Question [QCM-suites-convergence-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

- ☒ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$
☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$
☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Question [QCM-suites-convergence-C] : Soit $c \in \mathbb{R}$, et $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \quad a_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

- ☒ la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge pour exactement une valeur de c
☐ la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ diverge quelle que soit la valeur de c
☐ $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = +\infty$
☐ $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = c$

Question [QCM-theo-accr-finis-B] : Pour toute fonction $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[0, 4]$ et dérivable sur $]0, 4[$, qui satisfait $f'(x) \geq 2$ pour tout $x \in]0, 4[$, on a :

- ☐ $f(4) - f(1) \leq 4$
☐ $f(4) - f(0) \leq 1$
☒ $f(2) - f(0) \geq 4$
☐ $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$

Question [QCM-val-intermed-image-interv-B] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(x^2)$, et $I \subset \mathbb{R}$ son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

- ☒ $I = \mathbb{R}$
☐ $I = [-1, 1]$
☐ $I = [0, 1]$
☐ $I = [0, +\infty[$

Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-complexes-A] : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = iy$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-derivabilite-discussion-A] : Soient g et h deux fonctions dérivables sur $] -1, 1[$, telles que $g(0) = h(0) = 0$, et $h'(x) \neq 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ n'existe pas, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$ n'existe pas.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-dev-limite-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$. Alors le développement limité d'ordre deux de $g(x) = f(x)^3$ autour de zéro est donné par $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-fonction-etc-B] : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur $]0, 1[$. Alors soit $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$, soit $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-induction-suites-limites-B] : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-inf-sup-A] : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

☐ VRAI ☒ FAUX

CATALOGUE

Question [TF-integrale-A] : Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(b_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x) \, dx, \quad n \geq 1.$$

Alors $(b_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-soussuite-A] : Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-serie-B] : Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-serie-entiere-A] : Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $k \geq 0$, $a_k \neq 0$, et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$. Alors la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-soussuite-B] : Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

☒ VRAI ☐ FAUX

CATALOGUE