

Analyse I
Prof. Anna Lachowska — EPFL

Notes par Joachim Favre

Bachelor d'informatique — Semestre 1
Automne 2021

J'ai fait ce document pour mon usage, mais je me suis dit que des notes dactylographiées pouvaient intéresser d'autres personnes. Faites attention au fait qu'il y a des erreurs, c'est impossible de ne pas en faire. Si vous en trouvez, n'hésitez pas à me les partager (les erreurs de grammaire et de vocabulaire sont naturellement aussi bienvenues). Vous pouvez me contacter à l'adresse e-mail suivante :

`joachim.favre@epfl.ch`

Si vous n'avez pas obtenu ce document par le biais de mon repo GitHub, vous serez peut-être intéressé par le fait que j'en ai un sur lequel je mets ces notes dactylographiées et leur code $\text{\LaTeX}$. Voici le lien (je vous invite à lire le README pour comprendre comment télécharger les fichiers qui vous intéressent) :

<https://github.com/JoachimFavre/EPFLNotesIN>

Notez que le contenu ne m'appartient pas. J'ai fait quelques modifications de structure, j'ai reformulé certains bouts, et j'ai ajouté quelques notes personnelles ; mais les formulations et les explications viennent principalement de la personne qui nous a donné ce cours, et du livre dont elle s'est inspirée.

Je pense qu'il est intéressant de préciser que, pour avoir ces notes dactylographiées, j'ai pris mes notes en $\text{\LaTeX}$ pendant le cours, puis j'ai fait quelques corrections. Je ne pense pas que mettre au propre des notes écrites à la main est faisable niveau quantité de travail. Pour prendre des notes en $\text{\LaTeX}$, je me suis inspiré du lien suivant, écrit par Gilles Castel. Si vous voulez plus de détails, n'hésitez pas à me contacter à mon adresse e-mail, mentionnée ci-dessus.

<https://castel.dev/post/lecture-notes-1/>

Je tiens aussi à préciser que les mots “trivial” et “simple” n'ont, dans ce cours, pas la définition que vous trouvez dans un dictionnaire. Nous sommes à l'EPFL, rien de ce que nous faisons n'est trivial. Quelque chose de trivial, c'est quelque chose que quelqu'un pris de manière aléatoire dans la rue serait capable de faire. Dans notre contexte, comprenez plutôt ces mots comme “plus simple que le reste”. Aussi, ce n'est pas grave si vous prenez du temps à comprendre quelque chose qui est dit trivial (surtout que j'adore utiliser ce mot partout hihi).

Puisque vous lisez ces lignes, je vais me permettre de vous donner un petit conseil. Le sommeil est un outil bien plus puissant que ce que vous pouvez imaginer, donc ne négligez pas une bonne nuit de sommeil au profit de vos révisions (particulièrement la veille d'un examen). Je vous souhaite de vous amuser pendant vos examens.

*À Gilles Castel, dont le travail m'a
inspiré cette méthode de prise de notes.*

*Repose en paix, personne ne
mérite de partir si jeune.*

Table des matières

1	Résumé par cours	11
2	Organisation	17
3	Prérequis	19
3.1	Identités algébriques	19
3.2	Types de fonctions élémentaires	20
3.3	Fonctions bijectives et réciproques	21
3.4	Fonctions composées	22
3.5	Transformation des graphiques	23
4	Nombres réels	25
4.1	Ensembles	25
4.2	Nombres naturels, rationnels et réels	26
4.3	Infimums et supremums	28
4.4	Dans le cas des intervalles	30
4.5	Densité d'un ensemble dans un autre	31
4.6	Retours aux infimums et supremums	32
5	Nombres complexes	35
5.1	Les trois formes des nombres complexes	37
5.2	Multiplication en forme polaire	41
5.3	Racines de nombres complexes	43
5.4	Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$	45
5.5	Polynômes à coefficients réels	46
5.6	Sous-ensemble du plan complexe	46
6	Suites de nombres réels	49
6.1	Exemples de suites, raisonnement par récurrence	49
6.2	Limites de suites	52
6.3	Opération algébriques sur les limites	56
6.4	Relation d'ordre	58
6.5	Limites infinies	62
6.6	Le nombre e	64
6.7	Suites définies par récurrence	66
6.8	Sous-suites	70
6.9	Suites de Cauchy	71
6.10	Limsup et liminf	73
7	Séries numériques	75
7.1	Définitions et exemples	75
7.2	Critères de convergence	81
8	Fonctions réelles	85
8.1	Définitions et propriétés de bases	85
8.2	Limite d'une fonction	90
8.3	Limites lorsque x tend vers $\pm\infty$	99
8.4	Limites infinies	100
8.5	Limites infinies lorsque x tend vers $\pm\infty$	101

8.6	Toutes les limites	101
8.7	Limites à droite et à gauche	104
8.8	Fonction exponentielle et logarithmique	105
8.9	Caractérisation	109
8.10	Fonctions continues	110
8.10.1	Continuité	110
8.10.2	Prolongement par continuité d'une fonction en un point	112
8.10.3	Fonctions continues sur un intervalle	113
9	Calcul différentiel	119
9.1	Fonctions dérivables	119
9.2	Fonctions hyperboliques	127
9.3	Dérivées multiples	129
9.4	Théorème des accroissement finis	130
9.5	Règle de Bernoulli-L'Hospital	135
9.6	Développements limités	137
9.7	Étude de fonctions	140
9.8	Retour aux développements limités	143
9.9	Développements limités pour le calcul des limites	145
10	Séries entières	147
10.1	Rayon de convergence	147
10.2	Série de Taylor	150
10.3	Primitive et dérivée	154
11	Calcul intégral	157
11.1	Intégrale d'une fonction continue	157
11.2	Relation entre l'intégrale et la primitive	161
11.3	Techniques d'intégration	164
11.4	Intégrales généralisées	174
11.4.1	Intégrales généralisées sur un intervalle borné	174
11.4.2	Intégrales généralisées sur un intervalle non-borné	177
12	Révision	181
12.1	Limites de suites et limites de fonctions	181
12.2	Séries numériques et intégrales généralisées	183
12.3	Fonctions dérivables et séries entières	184
12.4	Croissance relative des fonctions	185
12.5	Classes de régularité des fonctions	187
12.6	Préparation à l'examen	187

Liste des cours

Cours 1 : Organisation et prérequis — Mercredi 22 septembre 2021	17
Cours 2 : Axiomatique des nombres réels — Lundi 27 septembre 2021	25
Cours 3 : Développement des infimums et suprénums — Mercredi 29 septembre 2021 . . .	29
Cours 4 : Début des nombres complexes — Lundi 4 octobre 2021	35
Cours 5 : Fin des nombres complexes — Mercredi 6 octobre 2021	42
Cours 6 : Débuts des suites et de leur limite — Lundi 11 octobre 2021	49
Cours 7 : Suite des limites de suites — Mercredi 13 octobre 2021	53
Cours 8 : Suite de la suite des limites de suites — Lundi 18 octobre 2021	59
Cours 9 : Constante d'Euler, récurrence et sous-suites — Mercredi 20 octobre 2021	64
Cours 10 : Cauchy, liminf, limsup et début de Netflix — Lundi 25 octobre 2021	71
Cours 11 : Cratères de convergence lunaires — Mercredi 27 octobre 2021	78
Cours 12 : Le cours le plus simple, selon la Professeure — Lundi 1er novembre 2021 . . .	85
Cours 13 : Définition epsilon-delta des limites — Mercredi 3 novembre 2021	89
Cours 14 : Limites vers l'infini, de tous genres — Lundi 8 novembre 2021	95
Cours 15 : Exponentielle et logarithme cupide — Mercredi 10 novembre 2021	102
Cours 16 : Continuité — Mercredi 17 novembre 2021	110
Cours 17 : Des calculs de différences, c'est facile non ? — Lundi 22 novembre 2021	116
Cours 18 : Exponentielles, hyperboles et extrema — Mercredi 24 novembre 2021	125
Cours 19 : Le théorème préféré des élèves selon la prof ^e — Lundi 29 novembre 2021	131
Cours 20 : DL, extrema, points d'inflexion et concavité — Mercredi 1er décembre 2021 . .	137
Cours 21 : Propriétés des DL, et rayons de convergence — Lundi 6 décembre 2021	143
Cours 22 : Séries de Taylor et primitives de séries entières — Mercredi 8 décembre 2021 .	149
Cours 23 : Maintenant on fait des additions, facile aussi ! — Lundi 13 décembre 2021 . . .	157

Cours 24 : "Les intégrales c'est un art" (prof. Lachowska) — Mercredi 15 décembre 2021 .	165
Cours 25 : Intégrales généralisées — Lundi 20 décembre 2021	174
Cours 26 : J'ai un exam cet aprèm, alèd — Mercredi 22 décembre 2021	181

Chapitre 1

Résumé par cours

Cours 1 : Organisation et prérequis — Mercredi 22 septembre 2021 ————— p. 17

- Explication de l'organisation du cours.
- Révision des identités algébriques polynomiales, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques.
- Révision de la trigonométrie.
- Révision des types de fonctions (polynômiales, rationnelles, algébriques, élémentaires transcendentes, et réciproques), du concept de bijectivité, des fonctions composées et des transformations des graphiques.

Cours 2 : Axiomatique des nombres réels — Lundi 27 septembre 2021 ————— p. 25

- Définition du concept d'ensemble et des notations liées.
- Supposition que tous les ensembles sont des sous-ensembles d'un ensemble universel U .
- Définition des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.
- Définition des axiomes qui permettent de définir pleinement $\mathbb{R}$ (et de le différencier d'autres ensembles, type $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$).
- Définition de minorant, majorant, infimum et suprémum.

Cours 3 : Développement des infimums et suprémums — Mercredi 29 septembre 2021 — p. 29

- Démonstration que les suprémums et infimums sont uniques.
- Définition de la notation des intervalles, et démonstration de leur suprémums et infimums.
- Démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Définition des minimums et maximums.

Cours 4 : Début des nombres complexes — Lundi 4 octobre 2021 ————— p. 35

- Définition des nombres complexes, et de leur addition, multiplication, soustraction et division.
- Définition de l'exponentielle complexe.
- Définition des trois formes des nombres complexes (cartésienne, polaire trigonométrique et polaire exponentielle).
- Démonstration de la formule de De Moivre.

Cours 5 : Fin des nombres complexes — Mercredi 6 octobre 2021 ————— p. 42

- Définition du concept de conjugaison (le conjugué d'un nombre complexe) et de ses propriétés.
- Dérivation de la formule du cosinus et du sinus données par somme d'exponentielle complexe, et explication de leur utilité.
- Solution générale à l'équation $z^n = c$ où $c \in \mathbb{C}^*$ est une constante non-nulle, et $n \in \mathbb{N}$.
- Explication du théorème fondamentale de l'algèbre.

Cours 6 : Débuts des suites et de leur limite — Lundi 11 octobre 2021 ————— p. 49

- Définition des suites, et exemples comme la suite de Fibonacci, la suite arithmétique et la suite géométrique.
- Définition de suite minorée, majorée, croissante, décroissante, monotone, strictement croissante, strictement décroissante et strictement monotone.
- Explication de la preuve par récurrence, et explication d'une généralisation possible.
- Définition de limite convergente, et de la limite d'une suite.

Cours 7 : Suite des limites de suites — Mercredi 13 octobre 2021 ————— p. 53

- Démonstration de l'unicité des limites.
- Démonstration que toute suite convergente est bornée.
- Explication du comportement des limites lorsque nous additionnons, ou multiplions des suites convergentes.
- Étude de la convergence des limites lorsqu'elles sont combinées par des opérations.
- Démonstration de la limite d'un quotient entre deux polynômes.
- Démonstration que s'il existe une relation d'ordre entre deux suites convergentes, alors elle existe aussi pour leur limites.
- Démonstration du théorème des deux gendarmes pour les suites.

Cours 8 : Suite de la suite des limites de suites — Lundi 18 octobre 2021 ————— p. 59

- Démonstration de la limite des racines, et de la limites des suites géométriques.
- Démonstration du critère de d'Alembert.
- Définition des limites infinies, et de ses propriétés (par exemple, la règle du gendarme).
- Explication des formes indéterminées.
- Démonstration que $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ ne convergent pas.
- Démonstration du théorème de la convergence des suites monotones.

Cours 9 : Constante d'Euler, récurrence et sous-suites — Mercredi 20 octobre 2021 ————— p. 64

- Définition de la constante d'Euler, e .
- Définition des suites définies par récurrence.
- Dérivation des outils pour analyser ces dernières (récurrence linéaire, relation de récurrence croissante, etc.)
- Définition des sous-suites.
- Explication du théorème de la convergence des sous-suites, et du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Cours 10 : Cauchy, liminf, limsup et début de Netflix — Lundi 25 octobre 2021 — p. 71

- Définition des suites de Cauchy, et démonstration qu'une suite converge si et seulement si elle est Cauchy.
- Définition des limites supérieures et inférieures.
- Définition des séries numériques.
- Démonstration des cas de convergence et de divergence des séries géométriques.

Cours 11 : Cratères de convergence lunaires — Mercredi 27 octobre 2021 — p. 78

- Commentaire hors cours sur la fonction zêta de Riemann.
- Définition de la convergence absolue, et preuve qu'une série absolument convergente est convergente.
- Explication et preuve de la condition nécessaire ("test for divergence"), du critère de Leibnitz pour les séries alternées, du critère de comparaison pour les séries à termes non-négatifs, du critère de d'Alembert et du critère de Cauchy.

Cours 12 : Le cours le plus simple, selon la Professeure — Lundi 1^{er} novembre 2021 — p. 85

- Définition du concept de fonction, et de celui de graphique.
- Définition des différentes propriétés que les fonctions peuvent avoir (croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, monotone, strictement monotone, paire, impaire, périodique, majorée, minorée, bornée, surjective, injective, bijective).
- Définition de la borne supérieure, la borne inférieure, le minimum local, maximum local, minimum global et maximum global.
- Explication de comment trouver la plus petite période d'une fonction périodique (si la plus petite période existe).
- Explication de comment rendre une fonction bijective, et comment trouver son inverse.

Cours 13 : Définition epsilon-delta des limites — Mercredi 3 novembre 2021 — p. 89

- Définition de la composition de fonctions.
- Définition du voisinage et des limites de fonctions réelles.
- Explication et démonstration de la caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites.
- Démonstration de propriété des limites de fonctions (opérations algébriques, limites de polynômes et théorème des deux gendarmes pour les fonctions).

Cours 14 : Limites vers l'infini, de tous genres — Lundi 8 novembre 2021 — p. 95

- Démonstration du théorème de la composée de deux fonctions, suivie de beaucoup d'exemples.
- Démonstration des limites remarquables suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = x_0$$

- Définition des différents types de limites infinies, et de limites quand x tend vers l'infini.
- Explication des formes indéterminées.

Cours 15 : Exponentielle et logarithme cupide — Mercredi 10 novembre 2021 — p. 102

- Explication des propriétés des limites infinies, et du théorème du gendarme pour les fonctions.
- Définition des limites à droite et à gauche.
- Définition de la fonction exponentielle, et démonstration de ses propriétés.
- Définition du logarithme naturel (il *ne paie rien* pour attendre).
- Explication du théorème de la caractérisation des limites infinies à partir des suites.

Cours 16 : Continuité — Mercredi 17 novembre 2021 — p. 110

- Définition de la continuité, et de la continuité à gauche et à droite.
- Exemple de fonctions continues, et explication des opérations algébriques sur les fonctions continues.
- Explication du prolongement par continuité d'une fonction en un point.
- Explication du théorème de la valeur intermédiaire (TVI) et de son corollaire.

Cours 17 : Des calculs de différences, c'est facile non ? — Lundi 22 novembre 2021 — p. 116

- Explication de 3 autres corollaires du TVI.
- Définition de fonction dérivable.
- Définition de fonction différentiable, et de fonction dérivée.
- Définition des dérivées sur le côté.
- Démonstration qu'une fonction dérivable est continue.
- Explication des opérations algébriques sur les dérivées, et de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.

Cours 18 : Exponentielles, hyperboles et extrema — Mercredi 24 novembre 2021 — p. 125

- Démonstration du théorème permettant de calculer la dérivée d'une fonction réciproque.
- Calcul de la dérivée de l'exponentielle, définition du logarithme naturel et calcul de sa dérivée. Définition de l'exponentielle et du logarithme en base quelconque, et calcul de leur dérivée.
- Explication de la méthode de dérivée dite de la "dérivée logarithmique".
- Définition des fonctions hyperboliques et démonstrations de leurs propriétés.
- Définition des points stationnaires, et explication de là où se trouvent les extrema d'une fonction.
- Preuve du théorème de Rolle.

Cours 19 : Le théorème préféré des élèves selon la prof' — Lundi 29 novembre 2021 — p. 131

- Démonstration du théorème des accroissements finis (TAF), de trois de ses corollaires, et de sa version généralisée.
- Explication de la méthode pour démontrer qu'une équation a exactement n solutions.
- Démonstration de la règle de Bernoulli-L'Hospital et exemples d'application.

Cours 20 : DL, extrema, points d'inflexion et concavité — Mercredi 1^{er} décembre 2021 — p. 137

- Définition des développements limités, et preuve de leur unicité.
- Définition des séries de Taylor, et preuve qu'elles sont des développements limités.
- Démonstration d'une condition suffisante pour trouver les extrema locaux.
- Définition des points d'inflexion, et démonstration d'une condition suffisante pour les trouver.

- Définition des fonctions convexes et concaves, et explication de comment trouver la concavité d'une fonction.

Cours 21 : Propriétés des DL, et rayons de convergence — Lundi 6 décembre 2021 — *p. 143*

- Explication des opérations algébriques sur les développements limités, et des développements limités de fonctions composées.
- Explication du calcul de limites par développements limités.
- Définition des séries entières, et de leur domaine de convergence.
- Démonstration que le domaine de convergence d'une série entière est toujours un intervalle contenant x_0 et centré sur ce dernier.
- Définition du rayon de convergence.

Cours 22 : Séries de Taylor et primitives de séries entières — Mercredi 8 décembre 2021 *p. 149*

- Définition des séries de Taylor et des séries de MacLaurin.
- Explication de la méthode pour déterminer si une série de Taylor converge vers sa fonction.
- Calcul de séries de Taylor remarquables.
- Définition des primitives.
- Explication d'un théorème permettant de calculer la primitive d'une fonction définie par une série entière, et de son corollaire qui permet de calculer la dérivée d'une telle fonction.

Cours 23 : Maintenant on fait des additions, facile aussi ! — Lundi 13 décembre 2021 — *p. 157*

- Définition des subdivisions et des sommes de Darboux supérieure et inférieure.
- Définition de l'intégrale de Riemann.
- Démonstration du théorème de la moyenne.
- Démonstration du théorème fondamental du calcul intégral, partie 1 et 2.
- Démonstration des propriétés des intégrales.
- Explication et démonstration de la méthode d'intégration, dite du changement de variable.

Cours 24 : "Les intégrales c'est un art" (prof. Lachowska) — Mercredi 15 décembre 2021 *p. 165*

- Explication et démonstration de la méthode d'intégration par partie.
- Explication et démonstration de la méthode pour calculer les intégrales de fonctions rationnelles.
- Calcul de l'aire d'une ellipse.

Cours 25 : Intégrales généralisées — Lundi 20 décembre 2021 — *p. 174*

- Définition des intégrales généralisées sur un intervalle borné.
- Démonstration du critère de comparaison pour ces intégrales généralisées, et démonstration d'un corollaire à ce critère.
- Définition des intégrales généralisées sur un intervalle non-borné.
- Explication du critère de comparaison pour ces intégrales généralisées, et explication d'un corollaire à ce critère.

Cours 26 : J'ai un exam cet après-midi — Mercredi 22 décembre 2021 _____ *p. 181*

- Explication des liens entre les sujets étudiés (les points les plus importants sont d'utiliser la même méthode pour étudier la convergence d'intégrales pour les séries, et le critère de l'intégrale pour les séries).
- Explication et calcul des croissances relatives des fonctions.
- Résumé des différentes classes de régularité des fonctions.
- Conseils de la professeure pour se préparer à l'examen.

Chapitre 2

Organisation

Informations générales	La Professeure est Anna Lachowska. Les informations liées au cours seront sur Moodle. Voir annalachowska.github.io .
Cours	Les notes écrites seront disponibles en PDF après le cours. De plus, on peut trouver le cours pré enregistré de l'année passée sur SwitchTube. Il y a cependant les suites définies par récurrence et les limites supérieures/inférieures qu'on verra cette année, alors qu'ils ne l'ont pas vu l'année passée. Les cours sont naturellement retransmis sur Zoom, où on peut poser des questions.
Exercices	Les étudiants sont répartis dans différentes classes, voir sur Moodle. La série d'exercice prend plus de 2h, donc il vaut mieux la faire avant (en général la série sera mise le dimanche). Il n'est pas obligatoire d'aller aux séances d'exercices le samedi. De manière générale, une seule fois par semaine est suffisante (que ce soit le jeudi ou le dimanche), mais il est plutôt recommandé de venir le jeudi.
Questions	Nous pouvons poser nos questions aux assistants, ou sur le Forum Piazza, où les étudiants et les assistants pourront nous répondre.
Sujets	• Axiomes des nombres réels et complexes • Suites et séries numériques (limites d'une suite) • Fonctions réelles d'une variable réelle, limite et continuité, dérivée, étude • Série entière, polynômes de Taylor • Intégrales définies, indéfinies et impropres.
Littérature	L'ouvrage de référence est Jacques Douchet et Bruno Zwaehlen, <i>Calcul différentiel et intégrale</i> . Il n'est pas nécessaire de lire pour le cours, tout est dans les lectures, mais cela peut être pratique pour réviser les définitions.
Examen	Un seul écrit de 3h, principalement composé de QCM et de vrai-faux. On n'aura pas le droit d'avoir de document ou de calculatrice.

Chapitre 3

Prérequis

3.1 Identités algébriques

Polynomiales

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Exponentielles

Soit a, b nombre réels positifs ; x, y nombres réels, n naturel positif :

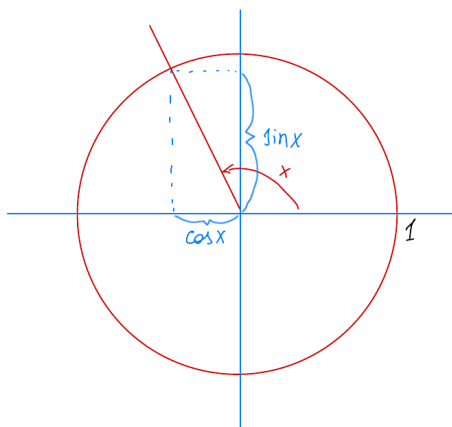
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^0 = 1$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^1 = a$

Logarithmes

Dans ce cours, $\log(x) = \log_e(x)$. Avec x, y réels positifs :

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^c) = c \log(x) \quad c \in \mathbb{R}$
- $\log_a(1) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\log_a(a) = 1$

Trigonométrie



On définit $\sin(x)$ et $\cos(x)$ comme projection pour tout x réel. On définit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \sin(x) \neq 0$$

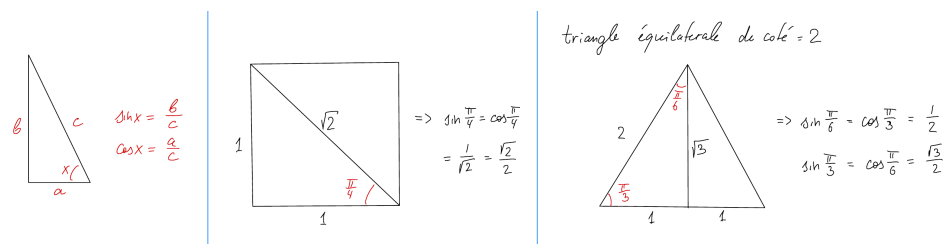
Il est important de connaître la propriété suivante :

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad \text{et} \quad \cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

De là, on peut trouver toutes les égalités, type que :

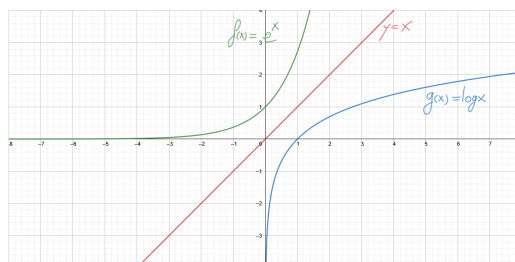
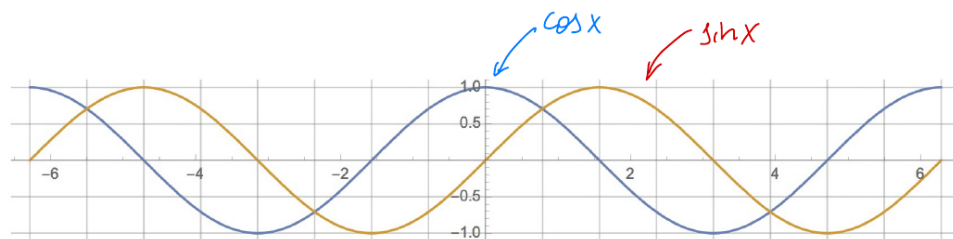
$$1 = \cos(x - x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

Pour trouver les valeurs de $\cos(x)$, $\sin(x)$ pour certaines valeurs :



3.2 Types de fonctions élémentaires

- Polynômes : $f(x) = 3x^3 + 5x + 4$.
 - Linéaire : $f(x) = ax + b$ a, b nombres réels
 - Quadratique : $f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c réels, mais $a \neq 0$
- Fonctions rationnelles : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes, mais $Q(x) \neq 0$
- Fonctions algébriques : Toute fonction obtenue à partir des polynômes par application des opérations $+, -, \div, \cdot, \sqrt{}$. Exemple : $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$
- Fonctions (élémentaires, toujours, parce que sinon y'a les intégrales qui arrivent) transcendentes : les fonctions qui ne sont pas algébriques
 - Fonctions trigonométriques (et leur réciproques) : $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$. Il existe une relation entre les deux : $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Il faut savoir les dessiner :
 - Fonctions exponentielles et logarithmiques : $f(x) = e^x$; $g(x) = \log(x), x > 0$ (log en base e). Nous avons que pour tout x réel $\log(e^x) = x$ et pour tout réel positif : $e^{\log(x)} = x$. Cela veut donc dire que e^x et $\log(x)$ sont des fonctions réciproques.



Fonctions réciproques

En général, si on a

$$y = f(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{\iff} x = f^{-1}(y)$$

on dit que $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont réciproques (il faut préciser les valeurs admissibles). Les graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $x = y$, car par définition, on lit le même graphique mais en échangeant les axes x et y ; c'est le même point qu'on peut lire de manière différente.

Exemple

Si on a

$$f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1, x \text{ réel}$$

Alors, la fonction réciproque de f est $f^{-1}(x) = \log_a(x), x > 0$.

3.3 Fonctions bijectives et réciproques**Définition du domaine de définition et de l'ensemble image**

Soient E, F deux ensembles des nombres réels.

$f : E \mapsto F$ est une règle qui donne une seule valeur $f(x)$ pour $x \in D_f \subset E$. Avec

$$D_f = D(f) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{x \in E : f(x) \text{ est bien définie}\} = \text{le domaine de définition}$$

$$f(D) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{y \in F : \exists x \in D_f \text{ tel que } f(x) = y\} = \text{l'ensemble image}$$

Définition de surjectivité

$f : E \mapsto F$ est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in D_f$ tel que $f(x) = y$.

Définition d'injectivité

$f : E \mapsto F$ est **injective** si $\forall x_1, x_2 \in D_f$ tel que $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Définition de bijectivité

Si $f : E \mapsto F$ est injective et surjective, elle est **bijective**.

Exemple

Si on prend $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = x^2$ n'est pas surjective.

Cependant, si on considère $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ est surjective, mais elle n'est pas injective car $f(-2) = f(2)$

Mais, $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ est injective. Elle est donc aussi bijective. On peut donc voir qu'on peut couper l'ensemble de définition pour rendre une fonction injective, et couper l'ensemble d'image pour rendre une fonction surjective. En faisant les deux, nous pouvons rendre une fonction bijective et donc pouvoir définir la fonction réciproque.

Définition de la fonction réciproque

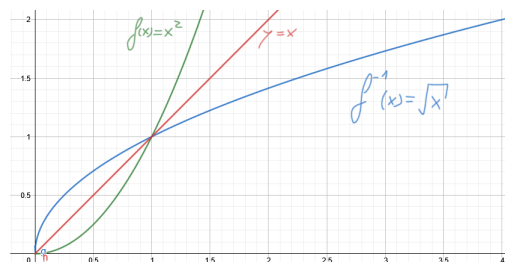
Pour $f : E \mapsto F$ bijective, on définit la fonction réciproque par l'équation $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$, avec $x \in E$ et $y \in F$.

La fonction doit être injective, car sinon on aurait plusieurs solutions de $f(x) = y$ par rapport à y , et si elle n'était pas surjective $x = f^{-1}(y)$ pourrait ne pas avoir qu'une seule valeur à certains point.

Si la fonction est bijective, on est donc certains de l'existence de la réciproque. Cependant, cela ne veut pas dire qu'il est facile de trouver cette fonction.

Exemple 1

$f(x) = x^2 : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est bijective, donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est sa fonction réciproque.



À nouveau, les graphiques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple 2

Par convention, on choisit $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ comme domaine de définition pour rendre $\sin$ bijectif (on pourrait en choisir un autre, mais c'est une convention ; et c'est important pour $\arcsin$).

$\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1; 1]$ est bijective.

$$y = \sin(x) \iff x \stackrel{\text{déf}}{=} \arcsin(y)$$

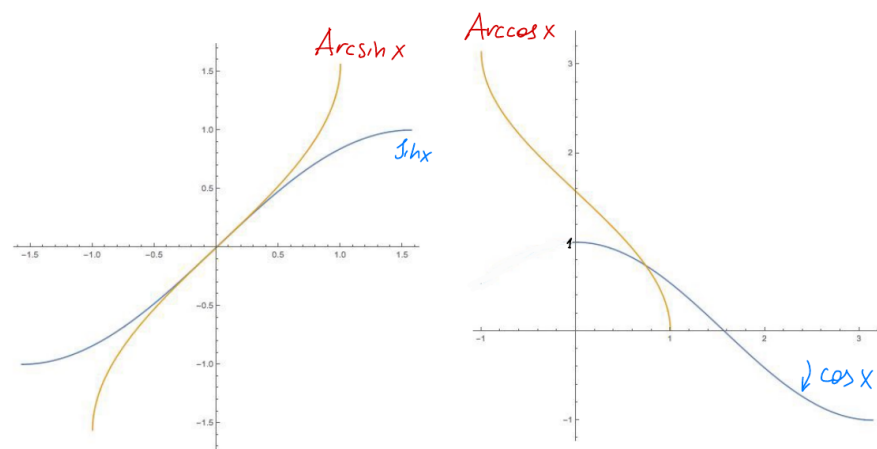
On a $\arcsin : [-1; 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Exemple 3

$\cos : [0; \pi] \mapsto [-1; 1]$ est bijective.

$$y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$$

On a $\arccos : [-1; 1] \mapsto [0; \pi]$



3.4 Fonctions composées

Définition de fonctions composées

Soit $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$. Supposons que $f(D_f) \subset D_g$. Alors on peut définir la **fonction composée** : $g \circ f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ par la formule $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La composition se lit donc de droite à gauche.

En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Exemple 1

$f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \sin(x)$ donne

$$g \circ f(x) = g(2x + 3) = \sin(2x + 3)$$

De la même manière

$$f \circ g(x) = f(\sin(x)) = 2 \sin(x) + 3$$

Exemple 2

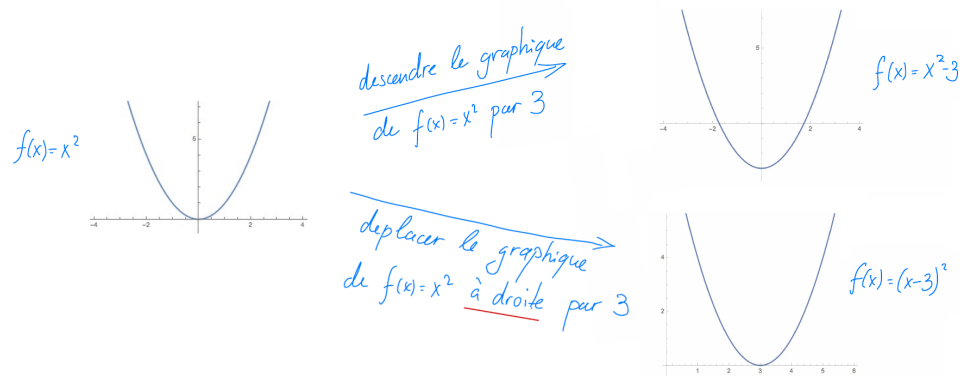
Essayons de combiner les fonctions réciproques et les fonctions composées. On sait que $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ par définition d'une fonction réciproque, et que $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

Exemple 3

Exercice au lecteur : $f(x) = x^3$, calculer $f \circ f \circ f \circ f(x)$

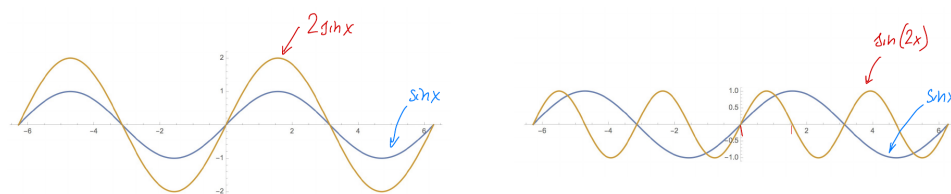
3.5 Transformation des graphiques

Exemple 1



On fait monter le graphique de $f(x)$ en faisant $f(x) + c$, ou on déplace le graphique **vers la gauche** en faisant $f(x + c)$.

Exemple 2



En prenant $cf(x)$ il faut étendre le graphique de $f(x)$ en direction verticale.
 En prenant $f(cx)$, alors il faut serrer le graphique dans la direction horizontale (si $|c| > 1$, sinon (si on divise par une valeur, en gros) il faut l'étendre).

Chapitre 4

Nombres réels

4.1 Ensembles

Définition d'ensemble	De manière naïve, un ensemble est une “collection d’objets définis et distincts” (G. Cantor). Il est important de noter le “distinct”, si on a $X = \{a, b\}$ et $Y = \{b, c, d\}$, alors $X \cap Y = \{a, b, c, d\}$, le b n’y est qu’une fois.
Notations	• $b \in Y \leftrightarrow b$ appartient à Y (ou, de manière équivalent, b est un élément de Y). • $a \notin Y \leftrightarrow a$ n’appartient pas à Y • $\forall \leftrightarrow$ pour tout • $\exists \leftrightarrow$ il existe • $Y \subset X \leftrightarrow Y$ est un sous-ensemble de X. Plus précisément, $Y \subset X \stackrel{\text{déf}}{\iff} \forall b \in Y \implies b \in X$ • $Y \not\subset X \iff \exists b \in Y$ tel que $b \notin X$ • $Y = X \stackrel{\text{déf}}{\iff} Y \subset X$ et $X \subset Y$ • $Y \neq X \implies Y \not\subset X$ ou $X \not\subset Y$ • $\emptyset$, l’ensemble vide, est défini comme $\emptyset = \{\}$. On trouve donc que $\emptyset \subset X \forall X$ et $X \subset X \forall X$
Ensemble universel	Supposons que les ensembles considérés sont sous-ensemble d’un d’un ensemble universel U .

Opérations ensemblistes

Soient $X, Y, Z \subset U$.

- Réunion :** $X \cup Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
Exemple : si on a $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{c, d, e\}$, alors $X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$
On a donc que $f \notin X \cup Y \iff f \notin X$ et $f \notin Y$.
De plus, l’associativité tient :
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$
- Intersection :** $X \cap Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ et } a \in Y\}$
Exemple : si on a $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{c, d, e\}$, alors $X \cap Y = \{c\}$
On a donc que $f \notin X \cap Y \iff f \notin X$ ou $f \notin Y$
L’associativité tient aussi :
$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$
- Différence :** $X \setminus Y = \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ et } a \notin Y\}$
Exemple : si on a $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{c, d, e\}$, alors $X \setminus Y = \{a, b\}$ et $Y \setminus X = \{d, e\}$
Attention, en général, elle n’est pas symétrique : $X \setminus Y \neq Y \setminus X$.

Proposition

Soient $X, Y, Z \subset U$. Alors $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

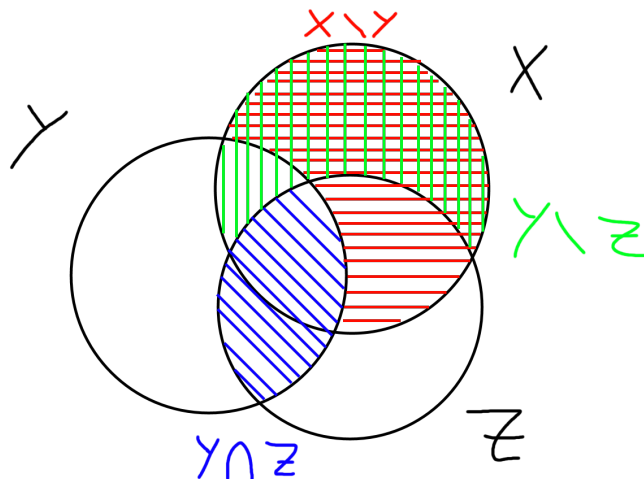
Démonstration À gauche :

$$\begin{aligned} & \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ et } a \notin (Y \cap Z)\} \\ &= \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ et } (a \notin Y \text{ ou } a \notin Z)\} \end{aligned}$$

À droite :

$$\begin{aligned} & \{a \in U \text{ tel que } a \in (X \setminus Y) \text{ ou } a \in (X \setminus Z)\} \\ &= \{a \in U \text{ tel que } (a \in X \text{ et } a \notin Y) \text{ ou } (a \in X \text{ et } a \notin Z)\} \\ &= \{a \in U \text{ tel que } a \in X \text{ et } (a \notin Y \text{ ou } a \notin Z)\} \end{aligned}$$

On trouve la même chose à droite et à gauche, ce qui termine notre démonstration. □



4.2 Nombres naturels, rationnels et réels

Nombres naturels

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ sont pris avec “+”, “.” et la relation d’ordre suivante :

$$a \leq b, a, b \in \mathbb{N} \iff \exists c \in \mathbb{N} \text{ tel que } a + c = b$$

Nous avons besoin de l’un des deux axiomes suivants (ils sont purement équivalents, l’un découle de l’autre) :

Propriété de bon ordre Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

Propriété de récurrence Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que (a) $0 \in S$ et (b) si $n \in S \implies n + 1 \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$.

Entiers relatifs

Les entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Cet ensemble a comme propriété que tout $x \in \mathbb{Z}$ possède un élément **opposé** par rapport à l’addition, i.e :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x + y = 0$$

On note $y = -x$.

Nombres rationnels

Les nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$. On a que $\frac{p}{q} = \frac{t}{s}$ si $p \cdot s = t \cdot q$.
Cet ensemble a la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x \neq 0 \implies \exists y \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x \cdot y = 1$$

On dit que y est réciproque à x . On le note $y = \frac{1}{x}$.

Nombres réels

Nous avons besoin d'un plus grand ensemble à cause de la proposition suivante

Proposition

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

On définit $\sqrt{2}$ comme la diagonale d'un carré de côté 1, ou, plus précisément, comme

$$x = \sqrt{2} \iff x > 0 \text{ et } x^2 = 2$$

Démonstration

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ tel que q est le plus petit possible (ici on utilise essentiellement la propriété de bon ordre, que ce plus petit q existe). (Par exemple, si on a $\frac{18}{15} = \frac{6}{5} \implies p = 6, q = 5$).

Alors $2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \implies p^2$ est pair $\implies p$ est pair. On peut démontrer cette dernière implication par la contraposée, i.e. montrer que si p^2 est pair, alors p est pair est équivalent à montrer que si p n'est pas pair (impair), alors p^2 n'est pas pair (impair). Ainsi,

$$p = 2k + 1 \implies p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

qui est impair.

Maintenant qu'on sait que p est pair, on peut l'écrire sous la forme $p = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$:

$$2q^2 = (2m)^2 \implies 2q^2 = 4m^2 \implies q^2 = 2m^2 \implies q^2 \text{ est pair}$$

On peut donc aussi écrire q sous la forme $q = 2n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ (les entiers non nuls). Donc,

$$\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} \text{ avec } 0 < n < q \quad \nexists$$

Ce qui est une contradiction, puisque on avait dit que q était le plus petit possible.

□

Définition de l'axiomatique de $\mathbb{R}$

1. **$\mathbb{R}$ est un corps** : c'est un ensemble avec $+$, $\cdot$ satisfaisant les axiomes suivants pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$. Pour l'addition :

- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
- $x + y = y + x$ (commutativité)
- $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tel que $x + 0 = x$ (existence de l'élément nul par rapport à l'addition)
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$ (existence de l'opposé additif)

Pour la multiplication :

- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associativité)
- $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité)
- $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, tel que $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (existence de l'élément nul par rapport à la multiplication)
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \implies \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = 1$ (existence de l'inverse multiplicatif pour les éléments non-nuls)

Et pour faire un lien entre les opérations, nous avons aussi besoin de l'axiome suivant, appelé distributivité :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

2. **$\mathbb{R}$ est un corps ordonné** : Il existe une relation d'ordre $\leq$ tel que, pour tout couple d'élément $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$. Pour tout triple d'élément $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a :

- $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$
- Si $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0 \implies x \cdot y \geq 0$

Notation : Si $x \leq y$ et $x \neq y$, alors $x < y$. De la même manière, si $x \geq y$ et $x \neq y$, alors $x > y$.

Cet axiome nous permet d'éliminer $\mathbb{C}$ de la définition. Cependant, $\mathbb{Q}$ est toujours là.

3. **Axiome de la borne inférieure** : Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\mathbb{R}_+$, il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

- (a) $a \leq x \quad \forall x \in S$
- (b) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$ ($\iff a + \varepsilon \geq x_\varepsilon$). En d'autres mots, peu importe le ε , il existe toujours un nombre x_ε entre a et $a + \varepsilon$ appartenant à S .

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est **l'infimum** (= la borne inférieure) de l'ensemble S .

$\mathbb{Q}$ ne suit pas cet axiome.

Puisque $\mathbb{R}$ suit ces trois axiomes, on dit qu'il est un corps commutatif, ordonné et complet.

4.3 Infimums et suprésums

Borne inférieure et supérieure

<i>Définition de minorant</i>	Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un minorant de S si $\forall x \in S$, on a $x \geq a$. Si S admet un minorant, alors S est minoré.
<i>Définition de majorant</i>	Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. On dit que $b \in \mathbb{R}$ est un majorant de S si $\forall x \in S$, on a $x \leq b$. Si S admet un majorant, alors S est majoré.
<i>Définition d'ensemble borné</i>	Si S est minoré et majoré, alors S est borné .
<i>Définition d'infimum</i>	Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel a vérifiant les propriétés suivantes : • $\forall x \in S, x \geq a$ • $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $x_\varepsilon - a \leq \varepsilon$ est l'infimum de S , $a = \inf S$.
<i>Note personnelle</i>	Un infimum est simplement le plus grand minorant. Les propriétés qu'il faut démontrer peuvent être réécrites comme suit : • a doit être un minorant • $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $a + \varepsilon \geq x_\varepsilon$. En d'autres mots, $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant (et vu que ε peut être aussi petit qu'on veut tant qu'il est plus grand que 0, cela nous assure qu'il n'y a pas de minorant plus grand que a).

<i>Définition de suprénum</i>	Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b vérifiant les propriétés suivantes : • $\forall x \in S, x \leq b$ • $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_\varepsilon \in S$ tel que $b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$ est le suprénum de S, $b = \sup S$.
<i>Exemple</i>	Soit $S = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}} \subset \mathbb{R}$. Clairement, l'ensemble est borné : $0 < S \leq 1$. On veut démontrer que $1 = \sup S$. On doit démontrer que 1. $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est vrai 2. Soit $\varepsilon > 0$. Nous devons trouver $x_\varepsilon \in S$ tel que $1 - x_\varepsilon \leq \varepsilon$. On peut prendre $x_\varepsilon = 1$ pour tout choix de $\varepsilon > 0$, ce qui est bon. On veut démontrer que $0 = \inf S$. On doit montrer : 1. $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est vrai 2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On veut trouver $x_\varepsilon \in S$ tel que $x_\varepsilon - 0 \leq \varepsilon$. Pour cela, on veut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \implies n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On ne peut pas prendre $x_\varepsilon = 0$, puisque cela ne fait pas parti du domaine. De ce fait, prenons $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 = n \in \mathbb{N}^*$ (avec $\lfloor x \rfloor$, la partie entière de x). Clairement, $n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \varepsilon > \frac{1}{n} \in S$. On peut donc prendre $x_\varepsilon = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \in S$

— Mercredi 29 septembre 2021 — Cours 3 : Développement des infimums et suprénums

Infimum et suprénum

Un synonyme d'infimum est “la borne inférieure de S ”, et suprénum est équivalent à “la borne supérieure de S ”.

Le dernier axiome de $\mathbb{R}$ est que “tout sous-ensemble non-vide $S \subset \mathbb{R}_+^*$ (réels positifs), admet une borne inférieure.

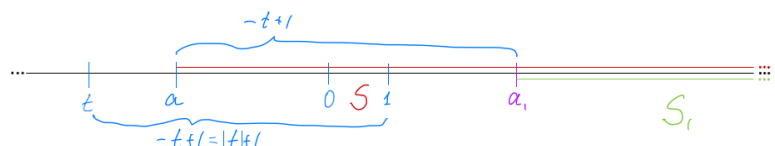
Théorème

Tout sous-ensemble non-vide majoré $S \subset \mathbb{R}$ possède un suprénum, qui est unique. De la même manière, tout sous-ensemble non-vide minoré $S \subset \mathbb{R}$ possède un infimum, qui est unique.

Démonstration Séparons notre démonstration en quatre cas :

(a) Si $S \subset \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \implies \exists a \in \mathbb{R}, a = \inf S$ par l'axiome de la borne inférieure.

(b) Si $S \subset \mathbb{R}$ est un ensemble tel que $\exists t \in \mathbb{R}_-^*$ (noter que $t < 0$) pour lequel $x \geq t \quad \forall x \in S$ (S est minoré par t , $t \leq 0$).



Soit $S_1 = \{x - t + 1, x \in S\} \subset \mathbb{R}_+^*$. On sait par l'axiome de la borne inférieure qu'il existe $a_1 = \inf S_1$. On veut démontrer que $a = a_1 + t - 1 = \inf S$. Vérifions les deux propriétés :

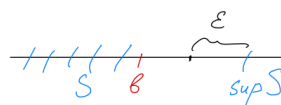
$$\forall x \in S \implies \overbrace{x - t + 1}^{\in S_1} \geq a_1 \implies \overbrace{x}^{\in S} \geq a_1 + t - 1 = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in S \text{ tel que } \overbrace{y - t + 1}^{\in S_1} - a_1 \leq \varepsilon \implies \overbrace{y}^{\in S} - \overbrace{(a_1 + t - 1)}^a \leq \varepsilon$$

(c) Soit $S \subset \mathbb{R}$, un ensemble tel que $\exists p \in \mathbb{R}$ pour lequel $x \leq p$, $\forall x \in S$. En d'autres mots, S est majoré par $p \in \mathbb{R}$.

Considérons $S_2 = \{y \in \mathbb{R} : y = -x, x \in S\}$, donc S_2 est minoré par $-p \in \mathbb{R}$ (S_2 est juste la "symétrie" de S). Par (b), on sait que $\exists a_2 \in \mathbb{R} = \inf S_2$ (puisque S_2 est minoré). Donc, $a = -a_2 = \sup S$ (on peut aussi démontrer que les deux propriétés du suprémum tiennent, mais c'est un exercice au lecteur).

Unicité On veut montrer que si $\inf S$ existe, alors il est le plus grand minorant de S . De la même manière, si $\sup S$ existe, alors il est le plus petit majorant de S . En particulier, cela implique que $\inf S$ et $\sup S$ sont uniques (s'ils existent).



Pour la deuxième phrase, supposons par l'absurde qu'il existe $\sup S$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \sup S$, et b est un majorant de S .

Donc,

$$\exists \varepsilon = \frac{\sup S - b}{2} \implies \sup S - \varepsilon > b \geq x \quad \forall x \in S \implies \sup S - x > \varepsilon$$

ce qui contredit la définition de $\sup S$.

Nous pouvons donc bien en conclure que $\sup S$ est le plus petit majorant de S et que, en particulier, le $\sup S$ est unique.

Le cas de l'infimum est symétrique.

□

4.4 Dans le cas des intervalles

Notation des intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $a < b$:

- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b]$, intervalle fermé borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle semi-ouvert borné
- $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle semi-ouvert borné
- $-\infty$ et ∞ , $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée, $-\infty < x < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Intervalles non-bornés :

- $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b]$ fermé
- $\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$ ouvert
- $\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[$ ouvert

Notations sur les lettres :

- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x > 0\}$
- $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \leq 0\}$
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x < 0\}$

**Théorème des
supréums et
infimums d'un
intervalle borné**

$$\bullet \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

Il faut connaître ces notations pour l'examen.

Nous voulons trouver comment trouver $\sup S$ et $\inf S$ pour un sous-ensembles $S \subset \mathbb{R}$ donné. Ce théorème nous est d'une certaine aide :

Proposition

$$\sup[a, b] = \sup[a, b[= \sup]a, b] = \sup]a, b[= b$$

Et de la même manière pour les infimums.

Démonstration (a) On veut montrer que

$$\sup[a, b] = b$$

La première propriété tient :

$$b \geq x \quad \forall x \in [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

De même pour la deuxième : Soit $\varepsilon > 0$ donné. On veut trouver $x_\varepsilon \in [a, b]$ tel que $b - x_\varepsilon \leq \varepsilon$. On peut prendre

$$x_\varepsilon = b \implies b - b = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

(b) On veut maintenant montrer que

$$\inf]a, b[= a$$

La première condition est vraie :

$$a \leq x \quad \forall x \in]a, b[\stackrel{\text{par déf}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Pour la deuxième propriété on a besoin d'un petit peu plus ruser. Soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver

$$x_\varepsilon \in]a, b[\text{ tel que } x_\varepsilon - a \leq \varepsilon \iff a < x_\varepsilon < b \text{ et } x_\varepsilon \leq a + \varepsilon$$

Si $\varepsilon < b - a$, on peut prendre $x_\varepsilon = a + \varepsilon$ qui marche avec les deux propriétés.

Si $\varepsilon \geq b - a$, alors on prend $x_\varepsilon = \frac{b+a}{2}$ qui marche aussi avec les deux propriétés.

Les autres cas de ce théorèmes sont similaires.

□

4.5 Densité d'un ensemble dans un autre**Théorème de la
propriété d'Ar-
chimède**

Pour tout couple (x, y) de nombres réels tel que $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.

Démonstration

1. On veut montrer que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{N}$ est majoré, alors, il existe $x = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Puisque la deuxième propriété tient pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, elle tient pour un ε précis, donc, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sup \mathbb{N} - n \leq \frac{1}{2} \implies \sup \mathbb{N} \leq n + \frac{1}{2} < \overbrace{n+1}^m \implies \overbrace{m}^{\in \mathbb{N}} > \sup \mathbb{N}$$

ce qui est une contradiction (un nombre de l'ensemble ne peut pas être plus grand que le plus petit majorant).

2. Soit $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+$. On sait que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{y}{x}$ (sinon $\frac{y}{x}$ serait un majorant). Donc,

$$n > \frac{y}{x} \iff nx > y$$

□

Puisque ce théorème tient, on dit que $\mathbb{R}$ est un corps **archimédien**. On peut aussi démontrer cette propriété pour $\mathbb{Q}$.

Théorème de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.

Démonstration Par la propriété d'Archimède,

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n(y - x) > 1 \implies y - x > \frac{1}{n} > 0 \implies x < x + \frac{1}{n} < y$$

Cela marcherait si x est rationnel, mais dans la majorité des cas $x + \frac{1}{n}$ n'est pas rationnel. En réécrivant notre inégalité, nous avons :

$$x < x + \frac{1}{n} \implies \frac{nx}{n} < \frac{nx + 1}{n}$$

En prenant $\lfloor x \rfloor$, la partie entière de x , i.e le plus grand entier $\leq x$ on a :

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq \frac{nx + 1}{n} < y$$

Or, avec $r = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x < r < y$$

Ce qui conclut notre démonstration.

□

Théorème

Soient $r, q \in \mathbb{Q}$, avec $r < q$. Alors, il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationnel) tel que $r < x < q$. On peut aussi démontrer $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, on a que $\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < z < y$.

Démonstration Laissée en exercice au lecteur.

4.6 Retours aux infimums et supremums

Exemple 1

Si on a $S = \{x > a\} =]a, +\infty[$. Alors, son infimum est donné par $\inf S = a$ et $\sup S$ n'existe pas (puisque'il n'existe pas de majorant).

Exemple 2

Soit $S = \left\{ \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

- Pour commencer, récrivons l'ensemble :

$$\frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n}$$

Ceci implique que

$$\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \implies 3 - \frac{2}{n+1} > 3 - \frac{2}{n} \implies S \text{ est croissante}$$

Donc, si $n = 1$, on a $3 - \frac{2}{1} = 1$, ce qui veut dire que S est minoré par 1, i.e. $1 \leq x \forall x \in S$. Par le théorème démontré précédemment, cela implique que $\inf S$ existe. On veut montrer qu'il est égal à 1 :

La première propriété tient déjà, puisqu'on a démontré que 1 est un minorant de S , i.e. $1 \leq x \forall x \in S$.

La deuxième propriété tient aussi :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon = 1 \text{ tel que } x_\varepsilon - 1 = 1 - 1 \leq \varepsilon$$

Donc, $\inf S = 1$.

- On remarque que S est majoré par 3 ($3 \geq 3 - \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$). Donc, $\sup S$ existe ; on veut maintenant montrer que $\sup S = 3$.

1. $3 > x \forall x \in S$ puisque, comme prouvé ci-dessus $3 > 3 - \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer l'existence de x_ε . Résolvons l'inégalité suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3 - \left(3 - \frac{2}{n}\right) \leq \varepsilon \iff \frac{2}{n} \leq \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} \leq n$$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \frac{2}{\varepsilon}$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

Ce qui nous permet de conclure que $\sup S = 3$, même si $3 \notin S$.

□

Remarque par rapport à la terminologie

Si $\inf S \in S$, on dit que **S possède un minimum**, avec $\min S = \inf S$ dans ce cas. Si $\sup S \in S$, on dit que **S possède un maximum**, avec $\max S = \sup S$ dans ce cas.

Exemple 2, la suite

Cela veut donc dire que S a un minimum, $\min S = 1$, mais il n'a pas de maximum puisque $\sup S \notin S$.

Chapitre 5

Nombres complexes

Limitation de $\mathbb{R}$ On a vu que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Maintenant, on remarque que **l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$** .
On introduit donc le symbole i , tel que $i^2 = -1$.

Exercice au lecteur Démontrer que cette équation n'a effectivement pas de solution dans les réels. Il faut démontrer en utilisant les axiomes de $\mathbb{R}$ que :

1. Si $x > 0$, alors $-x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \cdot x = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$ en utilisant (1) et (2).
4. $-1 < 0$

Par (3) et (4) on en déduit que $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

Correction

1. Partons de notre hypothèse :

$$x \geq 0 \implies x + (-x) \geq -x \implies 0 \geq (-x)$$

2. Partons de notre côté gauche :

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

En simplifiant par $0 \cdot x$ des deux côtés (en ajoutant l'opposé aux deux côtés, pour être plus formel), on obtient que :

$$0 = 0 \cdot x$$

3. On remarque que :

$$0 = 0 \cdot x = (x + (-x)) \cdot x = x \cdot x + (-x) \cdot x$$

Donc, en additionnant l'opposé de $x \cdot x$ aux deux côtés, c'est équivalent à :

$$-(x \cdot x) = (-x) \cdot x \stackrel{\text{commutativité}}{=} x \cdot (-x)$$

De la même manière,

$$0 = 0(-x) = (x + (-x))(-x) = x(-x) + (-x)(-x) = 0$$

Qui implique que :

$$-((-x)(-x)) = x(-x) = (-x)x$$

Puisqu'on obtiens deux résultats égaux $((-x)x = (-x)x)$, on sait donc que

$$-(x \cdot x) = -((-x)(-x)) \implies x \cdot x = (-x)(-x)$$

Ensuite, par un des axiomes de la relation d'ordre de $\mathbb{R}$, on sait que

$$x \geq 0 \implies \underbrace{x \cdot x}_{=(-x)(-x)} \geq 0$$

Et, de manière similaire :

$$x \leq 0 \xrightarrow{(1)} (-x) \geq 0 \implies \underbrace{(-x)(-x)}_{=x \cdot x} \geq 0$$

4. Par l'axiome de l'existence de l'identité multiplicative, on sait que $1 \neq 0$, ce qui implique que $-1 \neq 0$. Maintenant, si on suppose par l'absurde que $-1 > 0$, on a que :

$$-1 > 0 \implies (-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$$

Ce qui est une contradiction par le point (1), un nombre et son opposé (ici 1 et -1) ne peuvent pas être les deux positifs.

□

Nombres complexes

On considère les expressions de la forme $\{z = a + ib\} = \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, avec les opérations suivantes :

- $+$: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$, qui ressemble énormément à la manière dont on additionne des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Par les axiomes de $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est associative et commutative. De plus, il existe un élément neutre : $0 + 0i = 0$, il existe un opposé par rapport à l'addition : $(-a + i(-b)) + (a + ib) = 0 + i0 = 0 \in \mathbb{C}$.
- $\cdot$: $(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad - bc)$ qui est aussi associative et commutative. De plus, il existe aussi un élément neutre : $(a + ib)(1 + i0) = a + ib$ et il existe un réciproque si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, qu'on appelle z^{-1} et qui est tel que $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Note personnelle

La définition de la multiplication entre deux nombres complexes est cohérente si on utilise simplement la distributivité et le fait que $i^2 = -1$:

$$(a + ib)(c + id) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + i(ad + bc)$$

Proposition pour le nombre réciproque

Soit $z = a + ib \neq 0$. Alors,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

On remarque que, puisque $z \neq 0$, alors on peut bien diviser par $a^2 + b^2$.

Vérification

$$z \cdot z^{-1} = (a + ib) \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2 + i(ab - ba)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

□

Note personnelle

La définition de l'inverse peut être retrouvée facilement, si on multiplie notre fraction "par 1, mais pas n'importe quel 1" (comme disait ma prof de maths du collège, Ms. Lemmon). On utilise simplement une des identités remarquables, comme lorsqu'on souhaite rationaliser un dénominateur :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Distributivité Le produit est distributif sur l'addition :

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

| *Preuve* Laissée au lecteur comme exercice.

Grâce à toutes ces propriétés, on sait que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.

L'ordre de $\mathbb{C}$ On remarque que $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

| *Preuve* Si $i > 0$, alors $i^2 = -1 > 0$, ce qui est une contradiction. Si $i < 0$, alors $(-i)^2 = -1 > 0$, ce qui est aussi une contradiction. On avait bien démontré que $-1 < 0$ dans $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C}$ ne peut pas être ordonné.

□

De plus, on a deux racines complexes de l'équation $z^2 = -1$:

$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = -i$$

5.1 Les trois formes des nombres complexes

Forme cartésienne Les nombres sont la forme

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

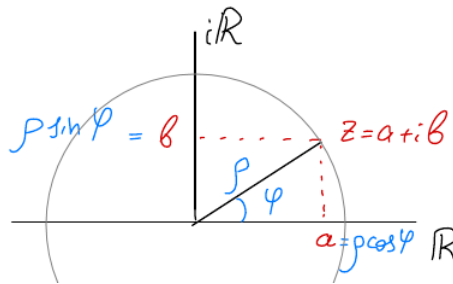
sont sous **forme cartésienne**.

On note aussi $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = \Re(z) + i\Im(z)$, où $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ dénomme la partie réelle de z , et $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ est la partie imaginaire de z . Attention, la partie imaginaire n'est pas ib , mais bien b .

Définition du module On appelle le **module** de z :

$$|z| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

On remarque que $|z| = 0 \iff z = 0$.



Forme polaire (trigonométrique)

On remarque qu'on peut aussi paramétriser notre vecteur selon sa longueur, ρ , et son angle φ :

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad \rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

Où $\Re(z) = \rho \cos \varphi$ et $\Im(z) = \rho \sin(\varphi)$. De plus,

$$|z| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho \geq 0$$

Donc, le module de z , c'est ρ . De plus, **l'argument de z** ($z \neq 0$, sinon ça ne fait aucun sens), φ , est défini à $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc,

$$\rho \neq 0 \implies \sin \varphi = \frac{\Im(z)}{\rho} \quad \cos \varphi = \frac{\Re(z)}{\rho}$$

Ou alors, on peut diviser l'un par l'autre et on obtient

$$\tan \varphi = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{b}{a}$$

si $a = \Re(z) \neq 0$, qui est un problème puisqu'on veut une formule générale (y compris pour $a = 0$).

À la recherche de l'argument

On veut trouver une formule qui nous permette de trouver l'argument de n'importe quel nombre complexe $z = a + ib \neq 0$.

On va utiliser la fonction $\arctan(x)$. Or, on sait qu'elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Séparons notre formule pour différents cas :

- **Si $z = a + ib$, $a > 0$** : alors c'est facile :

$$\varphi = \arg(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\implies \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Si $z = a + ib$, $a < 0$** : $\arctan(\frac{b}{a})$ est à un π près, donc on peut prendre

$$\varphi = \arg(z) \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\implies \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Si $\Re(z) = a = 0$** : Alors, on a deux cas.

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}, \text{ si } \Im(z) = b > 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{3\pi}{2}, \text{ si } \Im(z) = b < 0$$

Pour résumer :

$$\arg(a + bi) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{si } a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Note personnelle

En informatique, on appelle cette fonction `arctan2(b,a)`, et elle existe dans beaucoup de bibliothèques standard (oui c'est un anglicisme, mais vous auriez préféré "bibliothèque logicielle standard"?) puisqu'elle est utile à chaque fois qu'on a besoin de connaître l'angle d'un point sur un cercle quelconque à partir de ses coordonnées.

Remarque

Il est important de réaliser que l'argument de z est seulement défini pour les nombres complexes non nuls.

Forme polaire exponentielle

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^z = \underbrace{\exp(z)}_{\text{exp complexe}} \stackrel{\text{déf}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exp réelle}} (\cos(y) + i \sin(y))$$

Pourquoi est-ce une bonne définition ?

Si $z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \implies e^z = e^x (\cos(0) + i \sin(0)) = e^x$.

Si $z = iy \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \implies e^z = \cos(y) + i \sin(y)$, qui est la formule d'Euler.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} &= (\cos(y_1) + i \sin(y_1))(\cos(y_2) + i \sin(y_2)) \\
&= \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2) \\
&= \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \\
&= e^{i(y_1 + y_2)}
\end{aligned}$$

À cela s'ajoute que, si $y_1 = y_2 + 2k\pi$, alors :

$$e^{iy_1} = e^{i(y_2 + 2k\pi)} = \cos(y_2 + 2k\pi) + i \sin(y_2 + 2k\pi) = \cos(y_2) + i \sin(y_2) = e^{iy_2}$$

Pour résumer,

$$e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{i(y_1 + y_2)} \text{ et } e^{iy_1} = e^{iy_2} \text{ si } y_1 - y_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Non, mais vraiment, pourquoi c'est une bonne définition ? (Note personnelle)

Il est très difficile d'aborder le sujet de l'exponentielle complexe auprès d'étudiants, j'en ai aucun doute ; cette méthode permet de ne rien avoir à prouver de très spécial, mais n'est pas la plus intuitive, à mon sens. Vous êtes certainement encore en train de vous demander d'où sort le cercle ($x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ est la paramétrisation d'un cercle avec un angle t , donc cela veut dire que e^{it} trace un cercle sur le plan complexe).

Je vais faire une affirmation ici, pour l'instant il va falloir me croire sur parole (enfin c'est du texte, pas de la parole, mais bon), on peut démontrer que la règle de la dérivée en chaîne fonctionne aussi pour les fonctions complexes. De là, je vous invite à aller regarder la très bonne vidéo de 3Blue1Brown sur l'intuition derrière la formule d'Euler : <https://www.youtube.com/watch?v=v0YEaeIClKY> (y'a des sous-titres dans beaucoup de langues si vous êtes allergique à l'anglais).

Maintenant que vous avez cette intuition, il faut bien définir l'exponentielle, et partir directement de la formule d'Euler, comme ce qu'on a fait dans le cadre de ce cours, peut toujours paraître "dangereux" (c'est bien beau d'avoir une intuition, mais c'est pas très formel). Cependant, on peut bien démontrer cette formule, en utilisant l'affirmation que j'ai faite ci-dessus par rapport à la règle de la dérivée en chaîne. En effet, si on prend la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
x &\longmapsto \frac{e^{ix}}{\cos(x) + i \sin(x)}
\end{aligned}$$

On peut démontrer que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que la fonction est constante. Ceci implique que $f(x) = f(0)$ pour tout x (on aurait pu prendre n'importe quel constante, mais $f(0)$ est pratique). On remarque que $f(0) = 1$, et de là il est facile de montrer que l'égalité d'Euler tient. (Je tiens à préciser que cette preuve ne vient pas de moi, mais qu'on la verra l'année passée en cours (big up André-Chavanne)).

Maintenant, pour atteindre notre définition vue ci-dessus, il nous manque juste un petit bout : on sait pas comment e^{x+yi} se comporte. Cependant, là on peut justement la définir avec une propriété qui, elle, semble logique puisqu'elle marche pour les nombres dans $\mathbb{R}$:

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$$

Et de là on a bien que :

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

et, je l'espère, c'est plus intuitif.

Toute cette réflexion nous aura permis de définir notre exponentielle complexe en définissant uniquement le comportement de e^{x+y} avec $x, y \in \mathbb{C}$, ce qui est donc une supposition beaucoup moins grande que celle faite en classe, sauf qu'il faut utiliser de l'analyse complexe, qu'on ne verra pas en Analyse 1.

Formule d'Euler Une autre formule qui porte le nom d'Euler est que

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \implies e^{i\pi} + 1 = 0$$

Qui est une formule très intéressante, puisqu'elle relie trois constantes fondamentales, e , i et π ; le 0 et le 1; ainsi que l'addition, la multiplication et la puissance.

Les trois formes On a donc

$$z = \overbrace{\Re(z) + i\Im(z)}^{\text{cartésienne}} = \overbrace{|z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))}^{\text{polaire trigonométrique}} = \overbrace{|z|e^{i\arg(z)}}^{\text{polaire exponentielle}}$$

où, pour passer entre les deux formes polaires c'est très facile, mais il faut faire des calculs pour passer à la forme cartésienne.

De plus, on a le module de z :

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Et pour l'argument de $z = a + bi$:

$$\arg(a + bi) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{si } a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

Remarque

La forme polaire peut être notée sous la forme :

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \rho e^{i\varphi}$$

où $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exemple 1

Soit $z = 1 - i$. Quelle est sa forme polaire ? Le module se trouve facilement :

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De plus, pour l'argument, puisque $\Re(z) = 1 > 0$, on a :

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Donc,

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Exemple 2

Si on a $z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Quelle est sa forme cartésienne ?

$$z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$$

5.2 Multiplication en forme polaire

Proposition

Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ deux nombres complexes non-nuls. Alors,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Preuve

On a

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Notez qu'on a déjà démontré que $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ quand on a voulu justifier l'exponentielle complexe (pas dans ma note personnelle).

Rotation

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg(z_1)}$ et $z_2 = |z_2| e^{i \arg(z_2)}$, alors

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$$

Donc, multiplier deux nombres complexes revient à multiplier leur “longueur” et additionner leur angle.

Note personnelle

Cette propriété est très pratique en informatique lorsque nous voulons faire tourner quelque chose. C'est, entre autre, une des propriétés qui a fait que les mathématiciens ont développé les quaternions (équivalent des nombres complexes en quatre dimensions) ; ils sont pratiques pour les rotations en 3D (et 4D, mais bon).

Exemple 3

Soit $z = e^{i\varphi}$ ($|z| = 1$) et $w = e^{i\theta}$ ($|w| = 1$). Alors,

$$zw = e^{i(\varphi + \theta)}$$

Division en forme polaire

Si on a $z = |z| e^{i \arg z} = \rho e^{i\varphi}$, avec $z \neq 0$. Alors :

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$$

Preuve

On a bien :

$$z z^{-1} = \rho e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \frac{\rho}{\rho} e^{i(\varphi - \varphi)} = 1 e^{i0} = 1$$

De plus, de manière générale, si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$, avec $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}$$

Proposition (Formule de De Moivre)

Pour tout $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(\rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)))^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

En forme exponentielle, c'est équivalent à dire que :

$$(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

Définition des démonstrations par récurrence

(0) Proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \geq m$, $m \in \mathbb{N}$ fixé).

Initialisation : (1) Démontrer que la proposition est vraie pour $n = m$.

Hérédité : (2) Démontrer que si la proposition est vraie pour $n = k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq m$, alors elle est vraie pour $n = k + 1$.

Alors, la proposition est vraie pour

$$n = m \xrightarrow{(1)} n = m + 1 \xrightarrow{(2)} n = m + 2 \xrightarrow{(2)} \dots$$

On obtient donc bien tout $n \geq m$ par l'axiome de récurrence de $\mathbb{N}$.

*Démonstration***Initialisation :** Si on a $n = 1$, alors $(\rho e^{i\varphi})^1 = \rho e^{i1\varphi}$, qui est vrai.**Hérédité :** Supposons que la proposition est vraie pour $n = k \in \mathbb{N}^*$.
Démontrons que la proposition est vraie pour $n = k + 1$:

$$(\rho e^{i\varphi})^{k+1} = (\rho e^{i\varphi})^k (\rho e^{i\varphi}) \text{ par la supposition } \rho^k e^{ik\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi}$$

Or, c'est égal à :

$$\rho^{k+1} e^{i(k\varphi+\varphi)} = \rho^{k+1} e^{i(k+1)\varphi}$$

Ce qui démontre notre proposition pour $n = k + 1$.Par récurrence, la proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □*Remarque
(note personnelle)*Attention, ce théorème ne marche que pour $n \in \mathbb{Z}$. Sinon :

$$1 = 1^{\frac{1}{4}} = (e^{2\pi i})^{\frac{1}{4}} \stackrel{\text{De Moivre}}{=} e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

ce qui est une contradiction (cela vient de l'ambiguïté de la définition de la racine n-ième de x , puisqu'on a bien que $i^4 = 1$).Mercredi 6 octobre 2021 — **Cours 5 : Fin des nombres complexes****Exemple**

Disons que nous avons $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ et que nous voulons trouver z^{15} . Si nous voulons l'utiliser en utilisant les coefficient binomiaux, en utilisant le triangle de Pascal, nous aurions non seulement besoin d'arriver jusqu'à la quinzième ligne de ce triangle, mais aussi de trouver les 16 termes de z^{15} , puis de le simplifier.

Une meilleure méthode consiste à prendre la forme polaire exponentielle et appliquer la formule de De Moivre :

$$|z| = \sqrt{4 + 12} = 4, \quad \arg(z) = \arctan\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} \implies z^{15} = 4^{15}e^{-5\pi i} = 4^{15}e^{-\pi i} = -4^{15}$$

Définition de conjugaisonSoit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Son **conjugué**, $\bar{z}$, est défini comme :

$$\bar{z} \stackrel{\text{déf}}{=} a - ib$$

Si $z \neq 0$, on peut donc noter

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Donc, puisque $zz^{-1} = 1$, on a que :

$$\bar{z}z = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

Conjugaison sous forme polaireSoit $z = \rho(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. On a que

$$\bar{z} = \rho(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \implies \bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$$

Puisque $\sin(x)$ est impair et $\cos(x)$ est pair.**Propriétés de la conjugaison**Pour $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$1. \quad \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$
4. $|\overline{z}| = |z|$

Preuve

Laissée au lecteur. Indice : utiliser la forme cartésienne pour (1) et la forme polaire exponentielle pour (2), (3) et (4).

Ces propriétés nous permettent de simplement trouver le conjugué d'un nombre complexe : on remplace i par $-i$.

De plus, puisque $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, alors on a que

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

En particulier, si $|z| = 1$, on peut écrire z sous la forme :

$$z = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

On peut en déduire la formule suivante $\forall \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

Application

On veut exprimer $\sin^4 \varphi$ en termes de fonctions de multiples de φ :

$$\sin^4 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} - 4e^{3i\varphi}e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi}e^{-2i\varphi} - 4e^{i\varphi}e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi}) =$$

On peut simplifier ceci de la manière suivante :

$$\sin^4 \varphi = \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi}) = \frac{1}{16} \left(\underbrace{e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi}}_{2 \cos(4\varphi)} - \underbrace{4e^{2i\varphi} - 4e^{-2i\varphi}}_{-8 \cos(2\varphi)} + 6 \right)$$

On a donc :

$$\sin^4 \varphi = \frac{1}{8} \cos(4\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{3}{8}$$

5.3 Racines de nombres complexes

Proposition

Si $w = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

Démonstration

Soit $z = r e^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w$, où $w = \rho e^{i\varphi}$. En appliquant De Moivre, on trouve que

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = w \implies r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$$

Donc,

$$r^n = \rho > 0 \iff r = \sqrt[n]{\rho}$$

Et, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Cependant, on remarque que

$$k = 0 \implies \theta = \frac{\varphi}{n} \text{ et } k = n \implies \theta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

Qui sont égaux, à $2k\pi$ près. Ainsi, on trouve donc bien que

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Et donc que

$$\{z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } z^n = w\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

□

Racine carrées

Si on a $z^2 = w = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, alors :

$$\left\{ z = \sqrt{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1 \right\} = \left\{ \sqrt{\rho} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \sqrt{\rho} e^{i \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right)} \right\} = \left\{ \sqrt{\rho} e^{i \frac{\varphi}{2}}, -\sqrt{\rho} e^{i \frac{\varphi}{2}} \right\}$$

Il existe donc deux racines carrées pour tout $w \in \mathbb{C}^*$.

Exemple

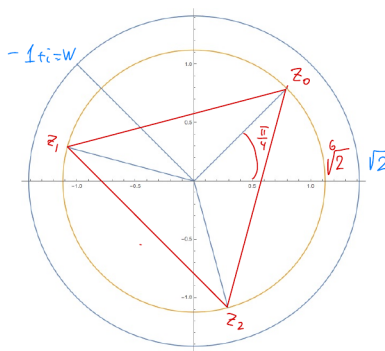
Nous voulons résoudre l'équation $z^3 = -1 + i$, avec $z \in \mathbb{C}$.

Soit $w = -1 + i$. Nous avons que $|w| = \sqrt{2}$ et

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

Nous savons par la proposition ci-dessus que :

$$\{z \text{ tel que } z^3 = w, z \in \mathbb{C}^*\} = \left\{ \sqrt[3]{2} e^{i \frac{3\pi + 2k\pi}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\}$$



Exercice au
lecteur

Calculer les arguments des 3 racines z_0, z_1, z_2 .

En général, les racines n -ièmes de $w \in \mathbb{C}^*$ sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{|w|}$ aux sommets d'un polygone régulier à n côtés, puisque la différence entre chaque argument est toujours $\frac{2\pi}{n}$.

L'orientation du polygone dépend de l'argument de w .

Exercice d'examen

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors l'équation $\left(\frac{z}{z}\right)^2 = z$ possède :

1. Exactement deux solutions dans $\mathbb{C}^*$
2. Exactement trois solutions dans $\mathbb{C}^*$
3. Un nombre infini de solutions dans $\mathbb{C}^*$
4. Au moins une solution $z \in \mathbb{C}^*$ telle que $|z| > 1$.

Réponse

La réponse est (2). En effet, soit $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\varphi}$. Donc,

$$\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi}} \right) = \rho e^{i\varphi} \implies (e^{2i\varphi})^2 = \rho e^{i\varphi} \implies e^{4i\varphi} = \rho e^{i\varphi} \implies e^{3i\varphi} = \rho$$

De là, on a que les arguments et les modules sont égaux. Donc, $\rho = 1$ et $e^{3i\varphi} = 1$. On trouve ainsi :

$$\left\{ \varphi = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2 \right\} \implies z = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$$

Ce qui donne donc bien trois solutions.

5.4 Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Équation quadratique On veut trouver les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, et $a \neq 0$. En complétant le carré, on peut démontrer que la solution est toujours

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Où la racine carrée est celle d'un nombre complexe, et donc celle qu'on a défini plus haut.

Si $b^2 - 4ac = 0$, alors il existe une seule solution $z = -\frac{b}{2a}$. Sinon, si $b^2 - 4ac \neq 0$, alors il existe toujours deux solutions complexes.

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, avec $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$, s'écrit sous la forme

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

où $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (peut-être avec des répétitions). Sans répétition nous avons

$$P(z) = a - n(z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_p)^{m_p}$$

où $w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C}$ sont distincts et $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$, avec $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$. On dit que m_i est la multiplicité de la racine w_i .

Remarque

Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$. Par exemple,

$$P(x) = x^2 + 1 = 0$$

de degré 2 n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais a deux solutions, $x = \pm i$ dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, dans $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$P(x) = (x - i)(x + i) = 0$$

Exemple

Est-ce que le polynôme $z^2 + (1 - i)z - i = P(z)$ est divisible par $(z - i)$? On peut soit vérifier que $P(i) = 0$, soit essayer de faire la division de polynôme (la première méthode est certainement la plus rapide).

On trouve bien que $z = i$ est une racine, donc que c'est divisible.

5.5 Polynômes à coefficients réels

Proposition

Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$, un polynôme à **coefficients réels**, alors $\bar{z}$ l'est aussi.

Démonstration On va démontrer que $P(z) = 0 \implies P(\bar{z}) = 0$ si $P(z)$ a des coefficients réels. Donc,

$$P(\bar{z}) = a_n \bar{z}_n + \dots + a_1 \bar{z}_1 + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}_k$$

Puisque tous les coefficients sont réels, on sait que $a_k = \bar{a}_k$. Ainsi, c'est égal à :

$$\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}_k = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z_k} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$$

Corolaire

Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

Démonstration Soit $P(z)$ à coefficients réels, et $z_i \notin \mathbb{R}$ une de ses solutions. On sait que $\bar{z}_i$ est aussi une racine, et donc que $(z - z_i)(z - \bar{z}_i)$ divise $P(z)$. En d'autres mots, on sait que $P(z)$ est un multiple de :

$$(z - z_i)(z - \bar{z}_i) = z^2 - z(z_i + \bar{z}_i) + z_i \bar{z}_i = z^2 - (2\Re(z_i))z + |z|^2$$

qui n'a que des coefficients réels.

Exemple

Si on a

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - i)(z + i)(z - 2)$$

Alors on peut bien l'écrire sous la forme d'un produit de polynôme à coefficient réels de degré un ou deux :

$$P(z) = (z^2 - i^2)(z - 2) = (z^2 + 1)(z - 2)$$

5.6 Sous-ensemble du plan complexe

Exemple 1

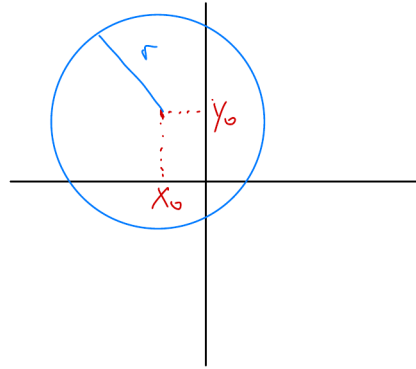
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ (donc $r \in \mathbb{R}$, c'est sous-entendu quand on dit que $r > 0$, puisque les nombres complexes ne sont pas ordonnés). Considérons $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| = r\}$. Cela trace un cercle sur le plan complexe. En effet :

$$|z - z_0| = |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Ce qui est équivalent à

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

qui est l'équation du cercle de rayon r et centre (x_0, y_0) .

**Exemple 2**

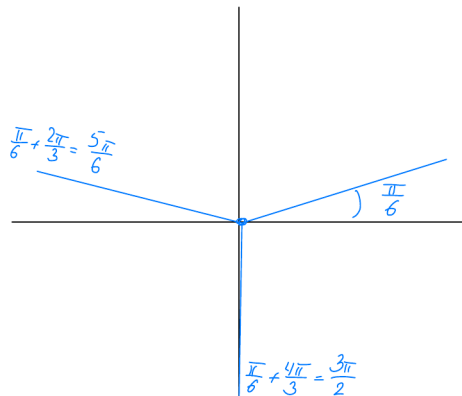
Soit l'ensemble suivant

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } \left(\frac{z}{|z|} \right)^3 = i \right\}$$

Prenons $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$. Donc,

$$\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{\rho} \right)^3 = i \implies e^{3i\varphi} = i = e^{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i} \implies \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Puisque ρ est arbitraire, on n'a pas de condition dessus, ce sont donc les trois demis droites (sans le point $z = 0$) des trois angles de l'ensemble ci-dessus.



Chapitre 6

Suites de nombres réels

6.1 Exemples de suites, raisonnement par récurrence

Définition de suite Une **suite de nombres réels** est une application $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel (ou pour tout $n \geq n_0$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$).

On utilise la notation suivante : (a_n) pour une suite où $a_n = f(n)$. Ou alors :

$$(a_n)_{n \geq 0} = \overbrace{\{a_0, a_1, \dots\}}^{\text{ensemble ordonné}} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

Exemples

1. $a_n = n = \{0, 1, 2, \dots\}$
2. $a_n = \frac{1}{n+1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
3. $a_n = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$
4. Les nombres de Fibonacci : $f_0 = 1 = f_1$ et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ qui est donc définie par récurrence. Voici les premiers éléments de la suite :

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$$



5. **Suite arithmétique** : $a_n = an + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
6. **Suite géométrique** : $a_n = ar^n$, avec $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$ et $r \neq \pm 1$

Définition de minorant Une suite est **minorée** s'il existe un nombre m réel tel que $a_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$. On appelle m un minorant.

Définition de majorant Une suite est **majorée** s'il existe un nombre M réel tel que $a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. On appelle M un majorant.

Définition de la valeur absolue On définit

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Définition de suite bornée On dit qu'une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Remarque

On voit que (a_n) est bornée si et seulement si

$$\exists x \geq 0 \text{ tel que } |a_n| \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En effet, puisque la suite est bornée, alors

$$\exists A, B \text{ tel que } A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc, si on prend $x = \max(|A|, |B|)$, on a bien que

$$|a_n| \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition de suite monotone

Une suite (a_n) est **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$.

Une suite (a_n) est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \leq a_n$.

Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Définition de suite strictement monotone

Une suite dite **strictement croissante** ou **strictement décroissante** est définie de la même manière, mais en prenant $>$ à la place de $\geq$ et $<$ à la place de $\leq$.

Une suite dite **strictement monotone** est donc strictement croissante ou strictement décroissante.

Retour aux exemples

1. $a_n = n$ est strictement croissante car

$$a_{n+1} = n + 1 > n = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Elle n'est pas majorée car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré ($\forall S > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > S$).
Cependant, elle est minorée par 0.

2. $a_n = \frac{1}{n+1}$ est strictement décroissante puisque

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De plus elle est bornée par $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

3. $a_n = (-1)^n$ n'est pas monotone, mais elle bornée :

$$-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ est croissante puisque :

$$f_{n+2} - f_{n+1} = f_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On sait donc que (f_n) n'est pas majorée, puisque on sait que

$$f_{n+2} - f_{n+1} \geq 1, f_{n+1} - f_n \geq 1, \dots, f_2 - f_1 \geq 1, f_1 \geq 1$$

En ajoutant toutes ces équations, on a une somme télescopique et on se retrouve donc avec :

$$f_{n+2} \geq n + 2$$

On peut donc en conclure que (f_n) n'est pas majorée, puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Cependant, elle est bien minorée.

5. $a_n = an + b$ est strictement croissante si $a > 0$, et strictement décroissante si $a < 0$. En effet :

$$a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$$

Par Archimède, on sait que si $a > 0$, alors, $\forall S > 0, \forall b \in \mathbb{R}$:

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } an > S - b \iff an + b > S$$

Ainsi, (a_n) n'est pas majorée (mais elle est minorée).

De manière symétrique, si $a < 0$, alors (a_n) n'est pas minorée (mais elle est majorée).

6. Trop de cas pour la suite géométrique.

**Raisonnement
par récurrence**

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n tel que :

1. **L'initialisation** : $P(n_0)$ est vraie
2. **L'hérédité** : $\forall n \geq n_0$, on a $P(n) \implies P(n+1)$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Intuition

Si on a une ligne de domino, et qu'on veut démontrer qu'ils tombent tous, il nous suffit de démontrer que le premier domino tombe, et que si un domino tombe, alors le suivant tombe aussi.

Il semble clair qu'il faut absolument démontrer les deux parties de l'argument, l'initialisation et l'hérédité.

*Contre exemple
1*

Hypothèse : tout nombre naturel est égal au nombre naturel suivant. Démontrons le en faisant une preuve par récurrence (mais en oubliant *malencontreusement* l'initialisation).

Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie, i.e. $n = n+1$. Alors, en ajoutant 1 à l'égalité on obtient $n+1 = n+2 \implies P(n+1)$ est vrai.

Erreur : On a oublié l'initialisation (c'est bête quand même), mais $0 \neq 1$, donc l'hypothèse n'a pas été démontrée.

*Contre exemple
2*

Hypothèse : "Tous les crayons sont de la même couleur dans n'importe quel ensemble de $n \geq 1$ crayons".

Initialisation : Dans un ensemble d'un seul crayon, tous les crayons sont de la même couleur. Donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité : On suppose que tout ensemble de n crayons contient seulement des crayons de la même couleur.

Soit $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$ un ensemble arbitraire de $n+1$ crayons. Alors $\{c_1, \dots, c_n\}$ et $\{c_2, \dots, c_{n+1}\}$ sont de la même couleur par supposition. Donc, c_1 et c_{n+1} sont de la même couleur que les autres, ce qui implique que $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ sont de la même couleur, donc que $P(n+1)$ est vraie.

La faute : L'hérédité $P(n) \implies P(n+1)$ ne marche que pour $n \geq 2$, puisque sinon les deux ensembles de crayons ont une intersection vide. On a donc que $P(1) \not\implies P(2)$ mais que l'initialisation est uniquement vérifiée pour $P(1)$.

**Proposition
(exemple de
preuve par ré-
currence)**

La suite de Fibonacci a la propriété suivante :

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration

Initialisation : Prenons $n = n_0 = 0$:

$$f_0 = 1 = 2 - 1 = f_2 - 1$$

Hérédité : Supposons que $\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Il nous faut démontrer que $\sum_{i=0}^{n+1} f_i = f_{n+3} - 1$. En partant du côté gauche, on a :

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = \underbrace{\sum_{i=0}^n f_i}_{\text{supposition}} + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = \underbrace{f_{n+1} + f_{n+2}}_{f_{n+3}} - 1 = f_{n+3} - 1$$

Conclusion Par récurrence on a donc bien démontré que

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

□

Exemple 2

On veut trouver la somme des n premiers nombres impairs naturels. On a besoin de commencer par trouver une hypothèse. On a $S_1 = 1$, $S_2 = 1+3 = 4$, $S_3 = 1+3+5 = 9$, $S_4 = 1+3+5+7 = 16$. Il semble donc raisonnable de prendre comme hypothèse que

$$S_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Démonstration par récurrence **Initialisation :** $P(n)$ a déjà été démontrée ci-dessus pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Hérédité : Supposons que $S_n = n^2$. Il faut en déduire que $S_{n+1} = (n+1)^2$. En partant du côté gauche :

$$S_{n+1} = \underbrace{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}_{\text{supposition}} + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Conclusion Par récurrence, on a démontré que

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

□

Généralisation de la méthode de récurrence

Il y a plusieurs manières de généraliser cette méthode, en voici une. Soit $P(n)$ une proposition pour $n \in \mathbb{N}$ telle que :

1. $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n_0 + k)$ avec k fixé, sont vraies
2. $\{P(n), P(n + 1), \dots, P(n + k)\} \implies P(n + k + 1), \forall n \geq 0$

Alors $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

6.2 Limites de suites

Définition de suite convergente et de limite

On dit que la suite (x_n) est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

On note la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$$

Remarque

Si on regarde plus précisément $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$:

$$|x_n - \ell| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x_n - \ell \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$$

En d'autres mots, on peut trouver une frontière après laquelle tous les éléments de la suite est arbitrairement proche de la limite, ceci pour tout $\varepsilon > 0$, donc pour n'importe quelle distance positive.

Avec les mots de la professeure : quel que soit $\varepsilon > 0$, si on considère l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ autour de ℓ , alors on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de la suite (x_n) après $n = n_0$ se trouvent dans cet intervalle.

Définition de suite divergente Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** (la suite peut partir vers l'infini positif ou négatif, ou osciller (enfin il faudrait démontrer ça, c'est juste une conjecture que je pose là)).

Exemple La suite (a_n) , $a_n = \frac{1}{n+1}$ est convergente, avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut démontrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui peut dépendre de ε) tel que $\forall n \geq n_0$, on a $|a_n - 0| \leq \varepsilon$, i.e. que $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ (on peut enlever la valeur absolue puisque c'est toujours positif). On a donc

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, on sait que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Et donc que $\forall n \geq n_0$:

$$n \geq n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

En conclusion, on a démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

□

Remarque Une autre manière de démontrer l'existence de n_0 aurait été de le trouver explicitement. Dans notre cas, on peut prendre

$$n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \implies n_0 + 1 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Or, si $n \geq n_0$ on a donc :

$$n \geq n_0 \implies n+1 \geq n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

On a donc trouvé un $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - \ell| = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon$$

□

Mercredi 13 octobre 2021 — Cours 7 : Suite des limites de suites

Exemple Soit $p \in \mathbb{Q}, p > 0$. Considérons la suite

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1}{n^p}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

On veut démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a :

$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n^p \xrightarrow{p>0} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \leq n$$

Il est possible de démontrer cette dernière implication, que si $x \leq y$ alors $x^p \leq y^p$ et $x^{\frac{1}{p}} \leq y^{\frac{1}{p}}$, en utilisant les axiomes des nombres réels. Voir le paragraphe suivant.

Si on choisit

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$$

Alors, $\forall n \geq n_0$:

$$n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p>0} \frac{1}{n^p} < \varepsilon$$

On a bien démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \forall p > 0$$

en utilisant la définition de la limite (on l'a démontré pour $p \in \mathbb{Q}$, mais cela marche aussi pour $p \in \mathbb{R}$, mais on définira les puissances réelles plus tard).

Exercice

On veut démontrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tel que } 0 < x \leq y \implies x^m \leq y^m \text{ et } x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Astuce : démontrer la première implication en faisant une preuve par récurrence, puis utiliser ce résultat pour la puissance de réciproque.

Il y a une correction dans les slides de la professeure, mais je ne considère pas que ça vaut la peine de la mettre ici.

Proposition (Unité de la limite) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des limites de (a_n) . Alors, $a = b$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, on sait que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Le $\frac{\varepsilon}{2}$ vient du fait que c'est vrai pour tout ε (on peut donc prendre celui qu'on veut). De la même manière, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$:

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq m_0, |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, $\forall n \geq \max(n_0, m_0)$, on sait que :

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \stackrel{\dagger}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

où $\dagger$ est l'inégalité triangulaire. Donc, puisque le résultat qu'on a trouvé est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a - b| \leq \varepsilon \implies a - b = 0 \implies a = b$$

Puisque le seul nombre positif qui est plus petit que tous les nombres positifs est 0.

□

Inégalité triangulaire Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a que :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$, et de la même manière pour $\forall y \in \mathbb{R}$.

Alors, si $x + y \geq 0$, on a :

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

Sinon, si $x + y < 0$, on a :

$$|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$$

□

Exemple divergent

On veut démontrer que $a_n = (-1)^n$ est divergente.

Démonstration Supposons par l'absurde qu'il existe la limite $\ell \in \mathbb{R}$ de $(-1)^n$.
Donc, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on sait que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \implies |a_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$$

On remarque que $a_{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout k tels que $2k \geq n_0$ et $2k+1 \geq n_0$, on a :

$$|a_{2k} - \ell| = |1 - \ell| \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |a_{2k+1} - \ell| = |-1 - \ell| \leq \frac{1}{4}$$

De là, en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$2 = |\ell - 1 + (-1 - \ell)| \leq |\ell - 1| + |-1 - \ell| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ce qui est une contradiction, on ne peut pas dire que $2 \leq \frac{1}{2}$. On en déduit donc que la série n'a pas de limite et donc qu'elle est divergente.

□

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit (a_n) une série convergente. On sait donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Prenons $\varepsilon = 1$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$|a_n - \ell| \leq 1 \iff \ell - 1 \leq a_n \leq \ell + 1$$

Soit $S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$. C'est un ensemble fini, donc il a un minimum et un maximum. On peut donc dire que la suite (a_n) est bornée par

$$\min(\min S, \ell - 1) \quad \text{et} \quad \max(\max S, \ell + 1)$$

□

<i>Réciproque</i>	La réciproque de la proposition est fausse. En effet, on a démontré un contre-exemple ci-dessus. $a_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 , cependant elle est divergente.
-------------------	---

6.3 Opération algébriques sur les limites

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. En d'autres mots :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Alors :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} pa_n = pa$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$, si $b \neq 0$.

Convergence des opérations Soit (a_n) et (b_n) des suites. On peut étudier la convergence de leurs opérations :

1. Si $(a_n + b_n)$ converge, alors soit (a_n) et (b_n) convergent, soit elles divergent toutes les deux.
2. Si $(a_n b_n)$ converge, on ne sait rien de la convergence de (a_n) et (b_n) .
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{a_n} \right)$ est divergente, si elle existe (s'il n'y a pas de division par zéro).

De plus :

4. Si $(a_n + b_n)$ converge et que (b_n) converge, alors (a_n) converge.
5. Si $(a_n b_n)$ converge et que (b_n) converge vers quelque chose d'autre que 0, alors (a_n) est convergente.

<i>Remarque</i>	On peut tirer un cas particulier de la propriété (1). Si on a
-----------------	---

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

alors soit (a_n) et (b_n) divergent, soit leur limite sont égales.

<i>Preuve de la propriété (3)</i>	Soit (a_n) , une suite qui converge vers 0. On sait donc que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a :
-----------------------------------	---

$$|a_n - 0| \leq \varepsilon \iff |a_n| \leq \varepsilon \iff \left| \frac{1}{a_n} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit $M > 0$, un nombre quelconque. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{M}$. On a donc que $\forall n \geq n_0$:

$$\left| \frac{1}{a_n} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon} = M$$

Ainsi, on voit que $\left(\frac{1}{a_n} \right)$ n'est pas bornée et donc divergente.

□

<i>Preuve de la propriété (5)</i>	Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $(a_n b_n)$ converge, et
-----------------------------------	---

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

On a donc :

$$a_n = \frac{a_n b_n}{b_n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

On peut séparer la limite sur le numérateur et le dénominateur, puisque les deux limites existent. On en déduit donc que (a_n) est convergente.

□

Proposition (quotient de deux suites polynômes)

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, si on a :

$$x_n = a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0 \quad a_i \in \mathbb{R}, a_p \neq 0$$

et :

$$y_n = b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0 \quad b_i \in \mathbb{R}, b_q \neq 0$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \text{diverge,} & \text{si } p > q \end{cases}$$

Démonstration On a :

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_0}{b_q n^q + \dots + b_0} = \frac{n^p \left(a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^p} \right)}{n^q \underbrace{\left(b_q + \dots + \frac{b_0}{n^q} \right)}_{v_n}} = \frac{n^p u_n}{n^q v_n}$$

Regardons la limite du quotient entre u_n et v_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^p}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{b_q + \dots + b_0 \frac{1}{n^q}}_{\rightarrow 0}} = \frac{a_p}{b_q}$$

qui n'est pas égal à 0, puisque $a_p \neq 0$.

Si $p < q$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{q-p}} = 0$$

puisque $q - p > 0$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} \frac{u_n}{v_n} = 0 \cdot \frac{a_p}{b_q} = 0$$

Si $p = q$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p} \frac{u_n}{v_n} = 1 \cdot \frac{a_p}{b_q} = \frac{a_p}{b_q}$$

Si $p > q$: On sait, puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p-q}} = 0$$

alors (n^{p-q}) est divergente. Or, puisque

$$\frac{x_n}{y_n} = n^{p-q} \frac{u_n}{v_n}$$

est le produit entre une suite divergente et une suite qui converge vers autre chose que 0, on sait qu'elle est divergente.

Exemple

On peut utiliser notre théorème pour trouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{85n^2 + 5n + 2}{2n^3 + n + 7} = 0$$

6.4 Relation d'ordre

Proposition

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. En d'autres mots :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Supposons que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m_0$ on a que

$$a_n \geq b_n$$

Alors, on sait que

$$a \geq b$$

Démonstration

Supposons par l'absurde que $b > a$.

Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$. Par la définition de la limite, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \text{et} \quad b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon$$

De là, on sait que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$a_n \leq a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{4} < a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2} < b - \frac{b-a}{4} = b - \varepsilon \leq b_n$$

En d'autres mots, $\forall n \geq n_0$:

$$a_n < b_n$$

Ce qui est une contradiction.

□

Théorème des deux gendarmes pour les suites

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$
2. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k$ on a $a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a :

$$-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$$

De plus, pour tout $n \geq k$, on sait que

$$a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell$$

Ainsi, $\forall n \geq \max(n_0, k)$, alors les deux inégalités sont satisfaites. Donc :

$$-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$$

En d'autres mots :

$$-\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \implies |b_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi, par la définition de la limite, on a bien trouvé que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$$

□

Lundi 18 octobre 2021 — Cours 8 : Suite de la suite des limites de suites

Limite de racine Soit $a_0 = 1$, et $a_n = \sqrt[n]{a}$ quand $n \geq 1$, pour $a > 0$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Preuve

$a = 1$: Alors la suite est donnée par $a_n = 1$ pour tout n , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$a > 1$: On remarque que

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

De là, on en déduit que, quand $x > 0$:

$$x - 1 = \frac{x^n - 1}{x^{n-1} + \dots + x + 1}$$

Donc, si on prend $x = \sqrt[n]{a} > 1$:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a - 1}{\underbrace{\underbrace{a^{\frac{n-1}{n}}}_{>1} + \dots + \underbrace{a^{\frac{1}{n}}}_{>1} + 1}_{>n}} < \frac{a - 1}{n}$$

En d'autres mots :

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a - 1}{n}$$

Puisque le troisième terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, on peut utiliser le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$0 < a < 1$: Soit $b = \frac{1}{a} > 1$. Par la deuxième partie, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

Suite géométrique

Soit $a_n = a_0 r^n$, avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, $|r| < 1$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = a_0$, $r = 1$
- (a_n) diverge quand $|r| > 1$ ou $r = -1$.

Preuve

1. **Soit $r > 1$.** Prenons $r = 1 + x$, avec $x > 0$. Donc :

$$r^n = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n}_{>0} \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx$$

Par la propriété d'Archimède, on sait que pour tout $M > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + nx) > M$. Donc :

$$|a_0 r^n| = |a_0 (1+x)^n| \geq |a_0| (1+nx) > |a_0| M$$

On en déduit que la suite n'est pas bornée, et donc divergente.

2. **Soit $0 < r < 1$.** Soit $q = \frac{1}{r} > 1$. Donc, $\forall M > 0$, on sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q^n > M$ pour tout $n > n_0$.
Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $M = \frac{|a_0|}{\varepsilon}$. Ainsi :

$$q^n > \frac{|a_0|}{\varepsilon} \implies \frac{1}{q^n} = r^n < \frac{\varepsilon}{|a_0|} \quad \forall n \geq n_0$$

En conséquence,

$$|a_0| r^n < \varepsilon$$

Par la définition de la limite, on a donc :

$$|a_0 r^n - 0| < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$$

3. **Soit $r = 1$.** On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 = a_0$$

4. **Soit $r < 0$.** Exercice au lecteur. Astuce : si $|r| > 1$, alors par le point (1) on sait que $|a_0 r^n|$ n'est pas bornée.
Si $-1 < r < 0$, on peut prendre $q = -r$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a q^n = 0$ par le point (2). Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a_0 (-1)^n}_{\text{borné}} \underbrace{q^n}_{\rightarrow 0} = 0$$

Exemple

Soit la suite

$$a_n = \frac{5^n}{n!}$$

Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Pour utiliser les mots de la professeure, “la factorielle est plus forte que l'exponentielle”.

Preuve

Soit $n > 6$. Alors on a :

$$a_n = \underbrace{\frac{5}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{5}}_M \cdot \underbrace{\frac{5}{6}}_{\leq \frac{5}{6}} \cdot \underbrace{\frac{5}{7}}_{< \frac{5}{6}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{5}{n}}_{< \frac{5}{6}} < M \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} = M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^n = M \left(\frac{6}{5}\right)^5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

par le théorème des limites de suites géométriques. De plus, notre suite est bornée :

$$0 \leq \frac{5^n}{n!} \leq M \left(\frac{6}{5}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \forall n > 6$$

Puisque les deux bornes tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ alors a_n tend vers 0 par le théorème des gendarmes.

Remarque

De la même manière on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000000^n}{n!} = 0$$

Remarques

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\ell|$$

2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$. Alors, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

3. En général $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \ell \neq 0$ n'implique pas que (x_n) converge.

4. Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$$

Démonstrations

1. La démonstration est laissée en exercice au lecteur, mais on utilise que $||x_n| - \ell| \leq |x_n - \ell|$ (qu'il faut aussi démontrer, naturellement).

2. On sait que pour tout $n \geq n_0$ alors

$$0 \leq |x_n| \leq \varepsilon \implies -\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

3. On peut prendre $a_n = (-1)^n$ comme contre-exemple. En effet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

converge, alors que (a_n) diverge.

4. Soit (a_n) borné, c'est à dire que $|a_n| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M |b_n|$$

Or, par la propriété (2), $|b_n|$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc, par le théorème des gendarmes, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0 \xrightarrow{\text{propriété 2}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$$

Théorème (Critère de d'Alembert)

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \geq 0$$

Alors, si $\rho < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sinon, si $\rho > 1$, alors (a_n) diverge. Si $\rho = 1$, on ne sait rien.

Preuve

$\rho < 1$: Par hypothèse, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho + \varepsilon$$

On choisit ε de telle manière que $\rho + \varepsilon < 1$ (on sait qu'il existe puisque $\rho < 1$). Soit $m > n_0$. On sait que

$$\left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right| = \underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \underbrace{\left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \dots \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\leq \rho + \varepsilon} \leq (\rho + \varepsilon)^{m-n_0}$$

Donc :

$$0 \leq |a_m| \leq (\rho + \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| \quad \forall m > n_0$$

Or la borne supérieure est une suite géométrique, et elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, par le théorème des gendarmes, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$$

$\rho > 1$: On sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \rho - \varepsilon$$

À nouveau, on choisit ε tel que $\rho - \varepsilon > 1$ (on sait qu'il existe puisque $\rho > 1$). On a donc :

$$\left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right| = \underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right|}_{\geq \rho - \varepsilon} \underbrace{\left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right|}_{\geq \rho - \varepsilon} \dots \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\geq \rho - \varepsilon} \geq (\rho - \varepsilon)^{m-n_0}$$

En d'autres mots,

$$|a_m| \geq (\rho - \varepsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}|$$

Puisque la borne inférieure diverge, alors (a_n) est forcément divergente.

□

6.5 Limites infinies

Définition On dit que (a_n) tend vers $+\infty$ si $\forall A > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, alors $a_n \geq A$.
On note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Définition On dit que (a_n) tend vers $-\infty$ si $\forall A > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, alors $a_n \leq -A$.
On note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Terminologie On ne dit pas que des limites “convergent vers l'infini”, puisqu'elles divergent. On dit qu'elles “tendent vers l'infini”.

Propriétés 1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ et (b_n) est bornée, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm\infty$$

3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ et $a_n \geq b_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

4. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ et $a_n \leq b_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

5. Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

6. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ et $a_n \neq 0$ pour tout n . Alors, (a_n) diverge.

On appelle les propriétés 3 et 4 “la règle d’un gendarme”, par opposition à la “règle des deux gendarmes” pour les limites finies.

La démonstration du point 5 est laissée au lecteur.

Le point 6 est une continuation au critère de d’Alembert.

Formes indéterminées

1. $\infty - \infty$
2. $0 \cdot \infty$
3. $\frac{\infty}{\infty}$
4. $\frac{0}{0}$
5. 1^∞
6. 0^0
7. ∞^0

Suites trigonométriques

$(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont divergentes (mais bornées).

Démonstration Supposons par l’absurde que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = \ell$. L’ensemble

$$\{\cos(n), \cos(n+1), \cos(n+2), \cos(n+3), \cos(n+4)\}$$

contient toujours des valeurs positives et négatives pour tout n , puisque $3 \leq \pi < 4$. Il existe donc un nombre infini de valeurs positives et négatives, ce qui implique que la limite ne peut ni être positive ni être négative. Donc, on en déduit que nécessairement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) = 0$$

Par le même argument, on en déduit aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n) = 0$$

Cependant, cela veut donc dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\sin^2(n) + \cos^2(n))}_{=1 \ \forall n \in \mathbb{N}} = 0$$

Ce qui est une contradiction.

□

**Théorème
(convergence
des suites mo-
notones)**

Toute suite croissante qui est majorée converge vers le supremum de son ensemble. De la même manière, toute suite décroissante qui est minorée converge vers l'infimum de son ensemble.

De plus, toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$ (diverge). De manière similaire, toute suite décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$ (diverge).

Notation

$(a_n) \uparrow$ veut dire que (a_n) est croissante.

$(a_n) \downarrow$ veut dire que (a_n) est décroissante.

Preuve

Soit $(a_n) \uparrow$ une suite majorée. Alors il existe $\ell = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. En d'autres mots, $a_n \leq \ell$ pour tout n , et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq \ell - a_{n_0} \leq \varepsilon$$

Puisque (a_n) est croissante, et puisque ℓ est un majorant, on sait que $\forall n \geq n_0$, alors $\ell \geq a_n \geq a_{n_0}$. Ainsi :

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \ell - a_n \leq \ell - a_{n_0} \leq \varepsilon \xrightarrow{\text{déf}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

Soit $(a_n) \uparrow$ une suite non majorée. Alors, $\forall A > 0$, $\exists n_0$ tel que $a_{n_0} \geq A$. De plus, on sait que (a_n) est croissante. Donc, $a_n \geq a_{n_0} \geq A$ pour tout $n \geq n_0$. Par définition, on a donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Le cas de $(a_n) \downarrow$ est similaire.

□

_____ Mercredi 20 octobre 2021 — Cours 9 : Constante d'Euler, récurrence et sous-suites

6.6 Le nombre e **Proposition**

Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies telles que :

$$x_0 = y_0 = 1 \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 1$$

Alors :

1. $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $y_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $(y_n) \uparrow, \forall n \in \mathbb{N}$
4. $(x_n) \uparrow, \forall n \in \mathbb{N}$

De (2) et (3) on peut en déduire que (y_n) converge et que sa limite est plus petite ou égale à 3. Par là, et (1) et (4) on en déduit que (x_n) converge, vers une valeur plus petite ou égale à la limite de (y_n) , donc plus petite ou égale à 3.

*Preuve du
point (1)*

On sait que $x_0 \leq y_0$. De plus, par le binôme de Newton :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

On veut démontrer que chaque terme de (x_n) est plus petit que chaque terme de (y_n) (cela nous permettrait de conclure ce qu'on

veut conclure, que $x_n \leq y_n$) :

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{< 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{< 1} \leq \frac{1}{k!}$$

Donc,

$$x_n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n$$

pour tout $n \geq 1$.

Preuve du point (2)

On veut démontrer par récurrence que :

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 2$$

Initialisation : On sait que

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Hérédité : Partons du côté gauche :

$$\frac{1}{k!} = \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}}_{\text{supposition}} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Suite de la preuve : On sait maintenant que

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

De plus, puisque

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad \forall x \neq 1$$

on peut prendre $x = \frac{1}{2}$:

$$y_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve du point (3)

On remarque que :

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = y_n + \frac{1}{(n+1)!} > x_n$$

Donc $(y_n) \uparrow$.

Preuve du point (4)

Par l'inégalité AM-GM (moyenne arithmétique-moyenne géométrique), on sait que

$$\sqrt[n+1]{a_0 \cdot a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$$

En prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, on a :

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1 + n + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Donc, en mettant à la puissance $n + 1$ des deux côtés :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

□

Définition de e On définit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv e$$

Remarque

On peut démontrer (voir le livre) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$$

Estimation

On a :

$$e \approx 2.718281828459045 \dots$$

6.7 Suites définies par récurrence

Introduction

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction.

Est-ce que la suite converge ? Si oui, quelle est sa limite ?

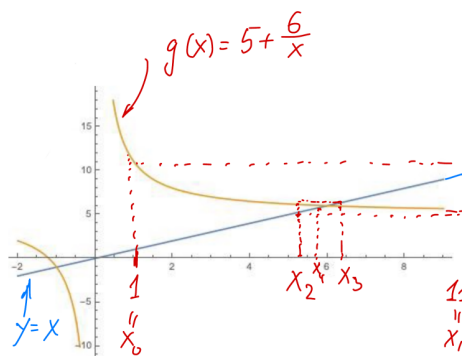
Exemple 1

Soit la suite (x_n) définie par récurrence :

$$x_0 = 1; \quad x_{n+1} = 5 + \frac{6}{x_n}$$

On peut trouver les premiers termes de la suite

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 5 + \frac{6}{1} = 11; \quad x_2 = 5 + \frac{6}{11}; \quad \dots$$



Possibilités de limites

Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \neq 0$$

Alors, $\frac{1}{x_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. On obtient l'équation suivante pour ℓ :

$$\ell = 5 + \frac{6}{\ell} \implies \ell^2 - 5\ell - 6 = 0 \implies \ell = \frac{5 \pm 7}{2} \implies \ell = 6, \ell = -1$$

Borne inférieure

On veut démontrer que $x_n > 5$ pour tout $n \geq 1$ par récurrence :

$$x_1 = 11 > 5$$

qui est vrai. De plus :

$$x_{n+1} = 5 + \underbrace{\frac{6}{x_n}}_{>0} > 5$$

On peut donc en déduire que si la suite converge, la limite est 6 (ça ne peut pas converger vers -1).

*Démonstration
convergence*

On veut démontrer que ça converge bien vers notre ℓ :

$$|x_{n+1} - \ell| = \left| 5 + \frac{6}{x_n} - \left(5 + \frac{6}{\ell} \right) \right| = \left| \frac{6}{x_n} - \frac{6}{\ell} \right| = \frac{6|x_n - \ell|}{|x_n||\ell|} < \frac{6}{25}|x_n - \ell|$$

De là, on en déduit que

$$|x_{n+1} - \ell| < \frac{6}{25}|x_n - \ell| < \left(\frac{6}{25} \right)^2 |x_{n-1} - \ell| < \dots < \left(\frac{6}{25} \right)^n |x_1 - \ell|$$

Donc, on a que :

$$0 \leq |x_{n+1} - \ell| < \left(\frac{6}{25} \right)^n |x_1 - \ell|$$

Par les deux gendarmes, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \ell| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - \ell) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell = 6$$

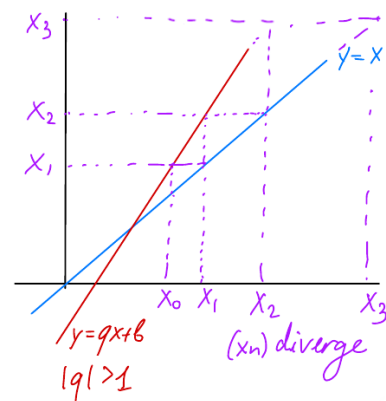
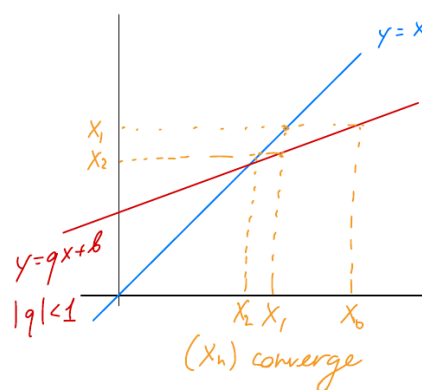
**Proposition
(récurrence linéaire)**

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, et avec $a_{n+1} = qa_n + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Si $|q| < 1$, alors (a_n) converge vers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1 - q}$$

2. Si $|q| \geq 1$, alors (a_n) diverge, sauf si (a_n) est une suite constante.



Preuve

Supposons que (a_n) converge. Alors, l'équation pour la limite est

$$\ell = q\ell + b \implies \ell = \frac{b}{1 - q}$$

Quand $|q| < 1$: On a pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq |a_{n+1} - \ell| = |qa_n + b - (q\ell + b)| = |q||a_n - \ell| = \dots = |q|^{n+1}|a_0 - \ell|$$

Or, $|q|^{n+1}|a_0 - \ell|$ converge vers 0. Donc, par les deux gendarmes, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - \ell| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$$

Quand $|q| \geq 1$: On a démontré ci-dessus que

$$|a_{n+1} - \ell| = |q|^{n+1}|a_0 - \ell|$$

Or, puisque $|q| \geq 1$, on sait que la limite diverge ($a_0 - \ell \neq 0$).

Quand $q = 1$ ou $q = -1$: La preuve est laissée en exercice au lecteur. Indice : faire le cas où $q = 1$, et le cas où $q = -1$.

Proposition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g : E \mapsto E \subset \mathbb{R}$.

- Si g est bornée, c'est-à-dire que $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leq g(x) \leq M \quad \forall x \in E$$

alors la suite est bornée.

- Si g est croissante, c'est-à-dire que $\forall x_1, x_2 \in E$:

$$x_1 \leq x_2 \implies g(x_1) < g(x_2)$$

alors la suite est monotone.

Remarque

Si g est décroissante, alors (x_n) n'est pas monotone, on en est sûr (mais la suite peut être convergente). Par exemple, le premier exemple qu'on a vu.

Preuve

Faite en exercice dans la série 6.

Exemple

On prend une suite de très proche de celle de notre premier exemple :

$$x_0 = 4; \quad x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$$

On remarque que g est croissante. Donc, (x_n) est monotone. On peut démontrer par récurrence que, en effet, elle est décroissante :

$$x_0 = 4; \quad x_1 = 5 - \frac{6}{4} < x_0$$

De plus, l'hérédité est aussi vraie :

$$x_{n+1} < x_n \implies \underbrace{g(x_{n+1})}_{x_{n+2}} < \underbrace{g(x_n)}_{x_{n+1}} \implies x_{n+2} < x_{n+1}$$

Donc, $(x_n) \downarrow$ par récurrence.

On remarque que, si $x \geq 3$, alors :

$$g(x) = 5 - \frac{6}{x} \geq 5 - 2 = 3$$

Or, puisque $x_0 = 4 > 3$, alors on sait que $x_n \geq 3$ pour tout n . Puisque (x_n) est minorée par 3 et que $(x_n) \downarrow$, alors

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 3$$

On peut utiliser l'équation pour la limite :

$$\ell = 5 - \frac{6}{\ell} \implies \ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \implies \ell = 3; 2$$

Puisque $(x_n) \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$$

Astuces pour étudier les suites définies par récurrence

1. Trouver les candidats pour la limite, en supposant que cette dernière existe. Si cette équation n'admet pas de solution, alors la suite diverge.
2. Étudier la convergence.

(a) Récurrence linéaire, c'est à dire que $x_{n+1} = qx_n + b$. Alors :

- Si $|q| < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-q}$$

- Si $|q| > 1$, alors (x_n) diverge (sauf si x_n est une constante, c'est à dire que $x_0 = \frac{b}{1-q}$).

- Si $|q| = 1$, alors (x_n) diverge (sauf si (x_n) est constante).

(b) Si $x_{n+1} = g(x_n)$ avec g croissante. Alors, on sait que la suite est monotone.

- Si $x_0 < x_1$, alors la suite est croissante, et on veut montrer qu'elle est majorée, auquel cas elle converge.

- Si $x_0 > x_1$, alors la suite est décroissante, et on veut montrer qu'elle est minorée, auquel cas elle converge.

(c) Si $x_{n+1} = g(x_n)$, mais que g n'est ni linéaire ni croissante. Alors, on peut faire un graphique pour se donner une idée. On peut essayer d'utiliser la proposition suivante.

(d) Démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy (qu'on définira plus tard).

Proposition

Si (x_n) et (a_n) deux suites, où

$$0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et que $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x_{n+1} - \ell) = a_n(x_n - \ell)$$

alors (x_n) converge.

De la même manière, si $|x_{n+1} - \ell| \leq b_n|x_n - \ell|$ et $0 < b_n < \rho < 1$, alors x_n converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$

Note

Le ρ dans l'inégalité est important pour dire que (b_n) ne converge pas vers 1. Une notation équivalente serait de dire que $0 < b_n < 1$ et (b_n) n'admet pas de sous-suite qui tende vers 1. Sinon, un contre-exemple serait $b_n = 1 - \frac{1}{n}$.

C'est d'ailleurs la différence majeure entre la première affirmation et la deuxième (en plus des valeurs absolues). La première affirmation est incluse dans la deuxième : on ne sait pas vers quoi converge la première affirmation, cependant si on avait $0 < a_n < \rho < 1$, alors on saurait que sa limite est ℓ .

6.8 Sous-suites

Définition des sous-suites Une **sous-suite** d'une suite (a_n) est une suite $k \mapsto a_{n_k}$ où $k \mapsto n_k$ est une suite *strictement* croissante de nombres naturels.

Exemple Prenons $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$$

On remarque que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$$

alors que (a_n) est divergente.

Proposition (convergence d'une sous-suite)

Si (a_n) converge vers une limite ℓ , alors toute sous suite (a_{n_k}) converge aussi vers ℓ .

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, alors :

$$|a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Donc, $\forall k \geq n_0$, on a $n_k \geq k \geq n_0$, ce qui veut dire que

$$|a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$$

Note personnelle : contraposée

La contraposée de ce théorème est que s'il existe deux sous-suites de (a_n) qui convergent vers des valeurs différentes, alors (a_n) est divergente.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Dans toute suite bornée, il existe une sous-suite convergente. En d'autres mots, si on a (a_n) tel que

$$\exists m, M \text{ tel que } m \leq a_n \leq M \implies \exists (a_{n_k}) \subset (a_n) \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

Idée de la preuve

Soit (a_n) , une suite bornée. De ce fait $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On divise l'intervalle $[m, M]$ par 2. On retient la moitié contenant un nombre infini d'éléments de (a_n) (si les deux en contiennent un nombre infini, on en choisi une). Puis, on recommence. La longueur des intervalles est donnée par $\frac{M-m}{2^n}$ (où n est le nombre d'itération) qui tend vers 0. En choisissant un élément dans chaque intervalle, à chaque fois de telle manière à ce qu'il soit plus loin dans la suite, on obtient une sous-suite convergente.

6.9 Suites de Cauchy

Définition des suites de Cauchy La suite (a_n) est une suite de Cauchy si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, alors :

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Remarque

Cela veut donc dire qu'on peut trouver un n_0 après lequel la différence entre deux termes est toujours plus petite que epsilon.

Proposition Une suite (a_n) est une suite de Cauchy **si et seulement si** (a_n) est convergente.

Preuve $\Rightarrow$

Puisque (a_n) est une suite de Cauchy, alors on peut prendre $\varepsilon = 1$ et $m = r$, donc on a

$$\exists r \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a_n - a_r| \leq 1 \quad \forall n \geq r$$

Ainsi, on en déduit que, pour tout $n \geq r$, alors $|a_n| \leq |a_r| + 1$. Plus généralement, pour tout n :

$$|a_n| \leq \max\{|a_r| + 1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{r-1}|\}$$

Puisqu'il y a un nombre fini d'éléments, le maximum existe et donc la suite est bornée. Par Weierstrass, on sait donc qu'il existe une sous-suite convergente $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$$

Puisque (a_n) est une suite de Cauchy, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_p - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq m_0$$

De plus, puisque (a_{n_k}) converge vers ℓ , il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_{n_j} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq j_0$$

Soit $k_0 = \max(m_0, j_0)$. On sait que nos deux inégalités ci-dessus tiennent pour tout $n \geq k_0$. Puisque les sous-suites sont strictement croissantes et de nombres entiers, on en déduit que $n_{k_0} \geq k_0$. Or, $k_0 \geq m_0$ par sa définition, donc, par notre première inégalité :

$$|a_n - a_{n_{k_0}}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De la même manière, $k_0 \geq j_0$ par la définition de k_0 , donc, par la deuxième inégalité :

$$|a_{n_{k_0}} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - \ell| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc, par la définition de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

Preuve $\Leftarrow$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$

on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, $\forall p, q \geq n_0$, on a

$$|a_p - a_q| = |a_p - \ell + \ell - a_q| \leq |a_p - \ell| + |\ell - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc, (a_n) est une suite de Cauchy.

□

Remarque

Si on a une limite telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

alors, cela ne veut pas nécessairement dire que c'est une suite de Cauchy.

Exemple

Prenons la suite suivante :

$$a_n = \sqrt{n}$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+k)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{(n+k)^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Cependant, (a_n) diverge puisqu'elle n'est pas bornée. Ainsi, par notre théorème, elle ne peut pas être une suite de Cauchy.*Explication* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$$

Ici, n_0 peut dépendre de k . Dans l'exemple où on a $a_n = \sqrt{n}$, si on augmente k , on obtient toujours n_0 plus grand pour un ε donné. Mais, dans la propriété de Cauchy, $n_0 \in \mathbb{N}$ est le même pour toute différence $k = m - n$ d'indice.

Donc, la propriété de Cauchy est plus forte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

6.10 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée

Définition

Soit (x_n) une suite bornée. On sait donc par définition qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On définit les suites :

$$y_n = \sup\{x_k, k \geq n\} \quad z_n = \inf\{x_k, k \geq n\}$$

On remarque que y_n est décroissante (puisqu'on regarde le suprénum d'un ensemble toujours plus petit ; on jette à chaque fois un terme de plus, puis on regarde le suprénum de ce qui reste) et minorée par $y_n \geq x_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De la même manière, on voit que z_n est croissante, et majorée par $z_n \leq x_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \stackrel{\text{déf}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \stackrel{\text{déf}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Elles existent toujours, et :

$$z_n \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple

Prenons la suite

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 1$$

On remarque que, clairement, x_n est bornée puisque $-2 \leq x_n \leq 2$. On a :

$$x_n = \left(-2, 1 + \frac{1}{4}, -1 - \frac{1}{9}, 1 + \frac{1}{16}, -1 - \frac{1}{25}\right)$$

On peut maintenant construire (y_n) :

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{16}, \dots, 1 + \frac{1}{\left(n + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)^2}\right)$$

où la fraction au dénominateur donne alternativement 1 et 0 selon la parité de n .

Construisons maintenant (z_n) :

$$z_n = \left(-2, -1 - \frac{1}{9}, -1 - \frac{1}{9}, -1 - \frac{1}{25}, \dots, -1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right)^2}\right)$$

On se retrouve donc avec :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$$

Proposition

Une suite bornée (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$$

| *Preuve* $\Rightarrow$ Laissée en exercice au lecteur.

| *Preuve* $\Leftarrow$ On sait par hypothèse que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$$

Et donc, par le théorème des deux gendarmes :

$$z_n \leq x_n \leq y_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$$

□

Exemple 1

Prenons la suite de toute à l'heure :

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 1$$

On a montré que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$$

Par la contraposée de la propriété précédente, on sait que (x_n) diverge.

Exemple 2

Prenons la suite suivante :

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

On trouve que

$$y_n = \sup\{x_k, k \geq n\} = (1, 1, 1, \dots)$$

qui ne sont pas des éléments de (x_n) . De plus, on a

$$z_n = \inf\{x_k, k \geq n\} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right) = x_n$$

ce qui est vrai de manière générale pour toute suite croissante. On en déduit ainsi que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

Or, cela implique que (x_n) est convergente, et que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

Chapitre 7

Séries numériques

7.1 Définitions et exemples

Définition La **série** de terme général a_n est un couple :

1. La suite (a_n) .
2. La suite des sommes partielles :

$$S_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

Somme partielle On note la n -ème somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Série On note la série de terme général a_k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

On appelle a_k le k -ème terme.

On dit que la série est convergente si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ s'appelle la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dans le cas où elle existe, on dit que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers ℓ et on note :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$$

Divergence Si (S_n) est divergente, alors on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est divergente. En particulier, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$, alors on écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$$

Exemple Prenons la série suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \implies S_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \geq n$$

En d'autres mots, la suite n'est pas bornée. On trouve donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$$

Exemple pour les séries géométriques

Prenons la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \implies S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Pour rappel, on avait trouvé que :

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On peut donc diviser par $1 - x$:

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \forall x \neq 1$$

Si $x = \frac{1}{2}$, on trouve que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

En prenant la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\rightarrow 0}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Proposition (convergence des séries géométriques)

Nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r} \quad |r| < 1$$

Preuve

On peut utiliser la même méthode que l'exemple ci-dessus. On a besoin du $|r| < 1$ pour avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$$

Remarque personnelle

On peut utiliser la méthode suivante pour retrouver que

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Soit $f(x) = 1 + x + \dots + x^n$. On a l'égalité suivante :

$$xf(x) = x + x^2 + \dots + x^{n+1}$$

Ainsi en ajoutant 1 des deux côtés, on peut remarquer que :

$$1 + xf(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} = f(x) + x^{n+1}$$

Il ne nous reste qu'à résoudre pour $f(x)$:

$$f(x)(1 - x) = 1 - x^{n+1} \implies f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Proposition (divergence des séries géométriques)

La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

est divergente si $|r| \geq 1$ *Preuve*Si $r > 1$ ou $r < -1$, alors

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

n'est pas bornée, et est donc divergente.

Si $r = 1$, alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Si $r = -1$, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$$

On peut regarder les premiers termes :

$$(S_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$$

Ce qui nous permet d'en déduire que (S_n) est divergente.

□

Paradoxe d'Achille et la tortue

Disons qu'Achille et une tortue font la course. Si Achille cours à 10 m/s et la tortue à 0.1 m/s. Selon Zénon, si Achille donne une avance de 100 m à la tortue, alors il ne pourra jamais la rattraper puisque, quand Achille avance de 100 m, alors la tortue avance de 1 m. Ensuite, quand il avance de 1 m, la tortue avance de 1 cm. Ainsi, à chaque fois, la tortue se retrouve plus loin qu'Achille.

Regardons ça avec nos mathématiques actuelles. Considérons le temps qu'il faudrait à Achille pour rattraper la tortue (on a vu qu'une série géométrique pouvait donner des valeurs finies, pourquoi pas ici ?). Ce temps est donné par :

$$t = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} + \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} + \frac{0.01 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} + \dots = 10 \text{ s} + \frac{1}{10} \text{ s} + \frac{1}{1000} \text{ s} + \dots = 10 \text{ s} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$$

qui est une série géométrique de $r = \frac{1}{100}$. Donc,

$$t = 10 \text{ s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^k = 10 \text{ s} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 10 \text{ s} \frac{100}{99} = \frac{1000}{99} \text{ s}$$

Ainsi, on voit qu'Achille rattrapera la tortue en $\frac{1000}{99}$ s.

Conclusion : D'après Zénon, l'impossibilité pour Achille de rattraper la tortue vient du fait qu'il lui faudrait couvrir un nombre infini d'intervalles. Mais, d'après notre calcul, une somme infinie d'intervalles de décroissance géométrique peuvent converger vers une somme finie.

Exemple

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est divergente.

Preuve

Supposons qu'il existe

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

Considérons la sous-suite $(S_{2n}) \subset (S_n)$:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Puisque (S_n) converge vers S , on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Mais :

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Or, quand $n \rightarrow \infty$, on a que

$$0 = S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$

qui est une contradiction.

On peut donc en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

(puisque S_n est croissante, la limite ne peut pas diverger vers $-\infty$ ou osciller).

□

Mercredi 27 octobre 2021 — Cours 11 : Cratères de convergence lunaires

Exemple 3

La série suivante est convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Preuve

Soit la suites des séries partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}_{< 2 \cdot \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}}_{< 2 \cdot \frac{1}{4^2}} + \underbrace{\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}}_{< 2 \cdot \frac{1}{6^2}} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Donc :

$$S_n < 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

En d'autres mots :

$$S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n \implies \frac{1}{2} S_n < 1 \implies S_n < 2, \quad \forall n \geq 2$$

Donc (S_n) est majorée par 2. De plus,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

ce qui veut dire que $(S_n) \uparrow$. Puisqu'elle est aussi majorée, elle converge donc.

On peut en conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque 1

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

est convergente pour tout $p > 1$. (La preuve est dans la série 7.)

Remarque 2

On a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

La preuve de cette égalité est dans un fichier sur Moodle.

La fonction zêta de Riemann

La fonction zêta de Riemann est définie telle que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

Valeurs connues

- $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
- $\zeta(2k) = C_k \pi^{2k}$, où $C_k \in \mathbb{Q}$.
On sait que $\zeta(2k)$ est transcendant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
- $\zeta(3)$ est transcendant.
- Au moins une valeur entre $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnelle.

Une hypothèse dit que $\zeta(n)$ est transcendant pour tous $n \geq 2$ naturels.

Hypothèse de Riemann

Riemann a permis d'étendre cette fonction pour tous les nombres complexes $z \neq 1$. Son hypothèse dit que tous les zéros non-triviaux de cette fonction ont comme partie réelle $\frac{1}{2}$.

Exercice (hors du cours)

Démontrer que pour tout $s \geq 2$ naturel :

$$\left(\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right) \zeta(s) = 1$$

Astuce, calculer :

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s)$$

Pour voir une preuve complète, il y a un fichier sur Moodle pour voir cette preuve.

Remarque

La fonction zêta de Riemann n'est pas au champ pour l'examen.

Définition (Convergence absolue)

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est dite **absolument convergente** si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

est convergente.

Proposition

Une série absolument convergente est convergente.

Preuve

Soit les suite des sommes partielles suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad P_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Par hypothèse, (P_n) converge. C'est donc une suite de Cauchy. Pour tout $m, n \geq n_0$ (on prend $m > n$ sans perte de généralité (spdg)), on en déduit que :

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = |P_m - P_n| \leq \varepsilon$$

puisque (P_n) est une suite de Cauchy. On sait donc que (S_n) est aussi une suite de Cauchy (puisque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $m \geq n \geq n_0$, alors $|S_m - S_n| < \varepsilon$).

On en déduit donc que (S_n) converge.

□

**Proposition
(condition nécessaire)**

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Preuve

On sait que $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ est une suite de Cauchy. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$:

$$|S_m - S_n| \leq \varepsilon$$

En particulier,

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon$$

On sait donc que, par la définition de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Remarque

Attention, la contraposée n'est pas vraie ; si la limite est 0, alors la série ne converge pas forcément.

Par exemple, la série harmonique, i.e :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Exemple

Si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2} \text{ n'existe pas}$$

On sait donc que cette série ne converge pas, par la contraposée du théorème ci-dessus.

7.2 Critères de convergence

Proposition (Critère de Leibnitz pour les séries alternées) Soit (a_n) une suite telle que :

1. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a :

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|$$

En d'autres mots, la suite est décroissante en valeur absolue.

2. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a :

$$a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$$

En d'autres mots, la série est alternée.

3. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

Preuve

Pour tout $n \geq p$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec **$k > 1$ pair**, on a :

$$S_{n+k} - S_{n-1} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$$

Puisque k est pair, on a un nombre impair de termes. On peut les regrouper par deux de deux manières différentes :

$$a_n + (a_{n+1} + a_{n+2}) + \dots + (a_{n+k-1} + a_{n+k}) = (a_n + a_{n+1}) + \dots + a_{n+k}$$

Si $a_n > 0$: Puisque les termes deviennent de plus en plus petit en valeur absolue, et qu'ils sont alternés :

$$\overbrace{a_n}^{>0} + \overbrace{(a_{n+1} + a_{n+2})}^{\leq 0} + \dots + \overbrace{(a_{n+k-1} + a_{n+k})}^{\leq 0} = \overbrace{(a_n + a_{n+1})}^{\geq 0} + \dots + \overbrace{a_{n+k}}^{>0} \geq 0$$

On a donc que

$$0 \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k} \leq a_n$$

Si $a_n < 0$ On trouve avec le même raisonnement que :

$$a_n \leq a_n + \dots + a_{n+k} \leq 0$$

Donc, **de manière générale**, on a que :

$$\underbrace{|a_n + \dots + a_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_{n-1}|} \leq |a_n|$$

Cependant, la $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. Donc, par la définition de la limites, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, alors $|a_n| \leq \varepsilon$. On a donc que :

$$|S_{n+k} - S_{n-1}| = |a_n| \leq \varepsilon$$

Si k est impair, alors, par le même argument, on a que :

$$|S_{n+k} - S_{n-1}| \leq \varepsilon$$

Dans les deux cas, (S_n) est une suite de Cauchy. Donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

est convergente.

Série harmonique alternée

Prenons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Elle est convergente par le critère de Leibniz.

Remarque

On verra plus tard que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \ln(2)$$

Proposition (critère de comparaison pour les séries à termes non-négatifs)Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq k$.Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.*Preuve*

Soit les suites de sommes partielles suivantes :

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad P_n = \sum_{i=0}^n b_i$$

Puisque pour tout $i \geq k$ on a $0 \leq a_i \leq b_i$, on peut appliquer une somme sur cette inégalité :

$$\sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m b_i \implies 0 \leq S_m - S_n \leq P_m - P_n, \quad \forall m > n \geq k$$

Si (P_n) est une suite de Cauchy, alors (S_n) l'est aussi. Donc, si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.Si (S_n) est divergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Donc, puisque $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq k$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente.

□

Exemple

Prenons la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$$

Considérons la série des valeurs absolues :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$$

Or,

$$\left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Mais, cette série est convergente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Donc, $\left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$ converge par le critère de comparaison. Ainsi, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

Remarque

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne possède que des termes positifs, et la suite des sommes partielles est majorée, alors la série est convergente par définition.

De la même manière, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne possède que des termes négatifs, et la suite des sommes partielles est minorée, alors la série est convergente par définition.

Proposition (Critère de d'Alembert)

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R}$$

Alors, si $\rho < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente.

Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Idée de preuve Faire une comparaison avec une série géométrique. La preuve est faite en exercice dans la série 7.

Proposition (Critère de Cauchy (de la racine))

Soit (a_n) une suite telle que la limite existe, et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho \in \mathbb{R}$$

Alors, si $\rho < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente.

Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Idée de preuve Faire une comparaison avec une série géométrique. La preuve est faite en exercice dans la série 7.

Remarques

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$. Alors, nécessairement $r = \ell$.
2. Parfois, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'existe pas.
Donc, le critère de Cauchy est plus fort que le critère de d'Alembert.
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors on ne peut pas faire de conclusion sur la convergence de la série.

Exemple du point (3) La série suivante diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Alors que la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Exemple 1

Prenons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

Le critère de d'Alembert a l'air le plus simple à utiliser :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1$$

Donc, la série est convergente.

Puisque cette série converge, alors, par la condition nécessaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$$

Exemple 2

Prenons la série avec paramètre suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

On verra plus tard que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exemple 3

Prenons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{3n-1} \right)^{2n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Par le critère de Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx}{3n-1} \right|^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{3 - \frac{1}{n}} \right|^{2 - \frac{1}{n}} = \left| \frac{x}{3} \right|^2 = \rho$$

Si $|x| < 3$, alors la série converge absolument. Si $|x| > 3$ la série diverge.

Considérons maintenant le cas où $x = 3$, on peut regarder la condition nécessaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{3n} \right)}{\left(1 - \frac{1}{3n} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3n} \right)^{2n-1}}$$

On peut manipuler cette égalité pour trouver la limite vers $\frac{1}{e}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{3n} \right)}{\left(1 - \frac{1}{3n} \right)^{3n \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}}} \neq 0$$

Donc ça diverge.

Maintenant, prenons $x = -3$. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n-1}}_{=-1} \left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3n}{3n-1} \right)^{2n-1}}_{\rightarrow e^{\frac{2}{3}} \neq 0}$$

Pour conclusion la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{3n-1} \right)^{2n-1}$ converge absolument si $|x| < 3$ et diverge si $|x| \geq 3$.

Chapitre 8

Fonctions réelles

8.1 Définitions et propriétés de bases

Définition des fonctions	Une fonction $f : E \mapsto F$ où $E, F \subset \mathbb{R}$ est une application (une règle) qui donne pour tout élément $x \in D(f) = E$, un élément $y = f(x) \in F$. La notion réellement importante c'est que, à un élément de $D(f)$ il ne peut être associé qu'une seule valeur de $f(D)$. On dit que $D(f)$ est le domaine de définition de f (qui est égal à E). De plus, on note $f(D)$ l'ensemble image (qui est un sous-ensemble F). On note $x \mapsto f(x)$.
Définition de graphique	Le graphique de $f : E \mapsto F$ est l'ensemble des points sur le plan $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x, f(x))$.
Fonctions données par formule	Si la fonction est donnée par une formule, alors $D(f)$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ est bien définie.
Croissance	$f(x)$ est croissante sur $D(f)$ si $\forall x_1 < x_2 \in D(f)$, alors on a : $f(x_1) \leq f(x_2)$ $f(x)$ est strictement croissante sur $D(f)$ si, pour les mêmes hypothèses, alors : $f(x_1) < f(x_2)$ On note $f(x) \uparrow$ dans les deux cas.
Décroissance	$f(x)$ est décroissante sur $D(f)$ si $\forall x_1 < x_2 \in D(f)$, alors on a : $f(x_1) \geq f(x_2)$ $f(x)$ est strictement décroissante sur $D(f)$ si, pour les mêmes hypothèses, alors : $f(x_1) > f(x_2)$ On note $f(x) \downarrow$ dans les deux cas.
Monotonie	Si f est croissante ou décroissante sur $D(f)$, alors elle est monotone. De la même manière, f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur son domaine de définition.
Parité	On dit qu'un domaine de définition est symétrique si : $x \in D(f) \implies -x \in D(f)$

f est **paire** si $D(f)$ est symétrique, et si f est telle que

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

f est **impaire** si $D(f)$ est symétrique et si elle est telle que :

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D(f)$$

Périodicité

$f : E \mapsto F$ est **périodique** s'il existe $P \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in E$, alors $x + P \in E$ et :

$$f(x + P) = f(x), \quad \forall x \in E$$

On appelle P une **période** de f . On remarque que si P est une période, alors nP avec $n \in \mathbb{N}$ est aussi une période. Elle n'est donc pas unique.

Puisque, si f est périodique alors $x \in E \implies x + nP \in E$, on en déduit que E n'est pas borné.

Il est souvent (mais pas toujours ; par exemple : les fonctions constantes) possible de trouver **la plus petite période**, $P > 0$, telle que $\{nP\}_{n \in \mathbb{Z}}$ contiennent l'ensemble des périodes de la fonction périodique. (Pour que cet ensemble contienne toutes les périodes de la fonction, il faut bel et bien que P soit la plus petite (puisque n est dans $\mathbb{Z}$)).

Exemple 1

Disons que nous voulons trouver la périodicité de la fonction suivante :

$$f(x) = \sin^2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

On veut écrire $\sin^2(x)$ sous la forme d'une somme de sin et cos (puisque l'on connaît leur période, qui est 2π par définition (puisque elles paramétrisent un cercle de rayon 1)) :

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

On en déduit donc :

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Puisque multiplier x correspond à diviser la période, on trouve que la plus petite période est $P = \pi$.

Exemple 2

Prenons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

On a donc que $D(f) = \mathbb{R}$. On sait qu'un nombre rationnel plus un nombre rationnel donne un nombre rationnel. De la même manière, on peut démontrer par la contraposée qu'un nombre rationnel plus un nombre irrationnel donne un nombre irrationnel.

On en déduit que $P = 1$ est une période, mais aussi que n'importe quel $P \in \mathbb{Q}$ est une période de f . En d'autres mots, f est périodique mais elle n'admet pas de plus petite période.

Bornes

On dit que $f : E \mapsto F$ est **majorée** sur $A \subset E$ si l'ensemble $f(A) \subset \mathbb{R}$ est majoré.

On dit que f est **minorée** sur $A \subset E$ si l'ensemble $f(A) \subset \mathbb{R}$ est minorée.

Si $f(x)$ est à la fois minorée et majorée sur A , alors elle est **bornée** sur A . C'est équivalent à la propriété suivante :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } |f(x)|_{x \in A} \leq M$$

On définit **la borne supérieure** de f :

$$\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{f(x), x \in A\}$$

De la même manière, la **borne inférieure** est donnée par :

$$\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf \{f(x), x \in A\}$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2 + 3$ sur $A =]0, 1[$. On voit bien que $f(x)$ est bornée. On a donc :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{x^2 + 3, x \in]0, 1[\} = 4$$

De la même manière :

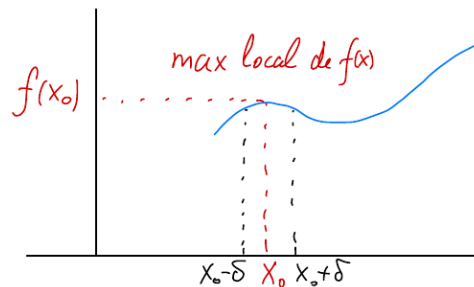
$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf \{x^2 + 3, x \in]0, 1[\} = 3$$

Maximum et minimum locaux

Soit $f : E \mapsto F$, avec $x_0 \in E$. On dit que f admet un **maximum local** au point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D(f)$, alors :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \leq f(x_0)$$

En d'autres mots, il existe un voisinage autour de x_0 , dans lequel toutes les images sont plus grandes ou égales à celle de $f(x_0)$.



De la même manière, on dit que f admet un **minimum local** au point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D(f)$, alors :

$$|x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq f(x_0)$$

Maximum et minimum locaux

Soit $f : E \mapsto F$ et $M \in \{f(x), x \in E\} = f(E)$ (c'est juste une manière *fancy* de dire que M est une valeur de la fonction), tels que pour tout $x \in E$, alors on a

$$f(x) \leq M$$

On appelle M le **maximum global** de f , et on le note :

$$\max_{x \in E} f(x) = M$$

De la même manière, si on a $m \in f(E)$, tel que pour tout $x \in E$, alors on a

$$f(x) \geq m$$

On appelle m le **minimum global** de f , et on le note :

$$\min_{x \in E} f(x) = m$$

Si $f(x_0) = M$ ou $f(x_0) = m$, on dit que la fonction f atteint son maximum global, ou son minimum global, respectivement, sur E au point x_0 .

Remarque 1

Si $\max_{x \in E} f(x)$ existe, alors f est majorée sur E , et

$$\sup_{x \in E} f(x) = \max_{x \in E} f(x)$$

De la même manière, si $\min_{x \in E} f(x)$ existe, alors f est minorée sur E , et

$$\inf_{x \in E} f(x) = \min_{x \in E} f(x)$$

Remarque 2 Une fonction bornée sur E n'atteint pas forcément son min ou max sur E .

Exemple Par exemple, $f(x) = x^2 + 3$ sur $E =]0, 1[$ est bornée, mais elle n'atteint ni son minimum, ni son maximum sur E .

Surjectivité Une fonction $f : E \mapsto F$ est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Remarque Si f n'est pas surjective, on peut réduire l'ensemble d'arrivée F pour que cela devienne le cas.

Injectivité Une fonction $f : E \mapsto F$ est **injective** si pour tout $y \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

La définition suivante est équivalente :

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

avec $x_1, x_2 \in E$.

Remarque Si f n'est pas injective, alors on peut réduire l'ensemble de départ E pour que cela devienne le cas.

Test sur un graphique Si on peut tracer une droite horizontale qui croise plus d'une fois la fonction, alors elle n'est pas injective.

Bijektivité Si une fonction $f : E \mapsto F$ est à la fois injective et surjective, alors elle est aussi **bijective**.

Réciprocité Si $f : E \mapsto F$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque par la formule suivante :

$$y = f(x), x \in E \implies x = f^{-1}(y), y \in F$$

Exemple La fonction suivante n'est pas injective

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Cependant, elle est bijective sur $[0, \pi]$.

Par convention, on choisit les domaines suivants pour que les fonctions trigonométriques soient bijectives :

- $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-1, 1]$
- $\cos x : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$
- $\tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \mathbb{R}$
- $\cot x :]0, \pi[\mapsto \mathbb{R}$

On peut donc définir les fonctions réciproques :

- $\arcsin x : [-1, 1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos x : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$
- $\arctan x : \mathbb{R} \mapsto \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \mapsto]0, \pi[$

Remarque Les graphiques des fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple (courant en examen) Soit la fonction suivante :

$$f(x) = 2 \sin(1 - x^2)$$

On veut trouver un plus grand ensemble où $f(x)$ est bijective, et donner une fonction réciproque et son domaine de définition. On peut résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{-\pi}{2} \leq 1 - x^2 \leq \frac{\pi}{2} \implies -1 - \frac{\pi}{2} \leq -x^2 \leq -1 + \frac{\pi}{2} \implies 1 - \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 1 + \frac{\pi}{2}$$

De là, puisque $x^2 \geq 0$, on en déduit que :

$$0 \leq x^2 \leq 1 + \frac{\pi}{2} \implies -\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$$

Cependant, puisqu'il y a un x^2 , il nous faut encore couper cet intervalle (x^2 n'est pas bijective sur cet ensemble). On a deux moitiés, aucune n'est "meilleure" que l'autre, donc on peut faire un choix arbitraire. Par exemple, on peut choisir :

$$0 \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}} \implies D(f) = \left[0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}\right]$$

Il faudrait justifier qu'on soit parti de $1 - x^2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et non pas, $1 - x^2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, par exemple. On peut le justifier en disant que $1 - x^2$ est de plus en plus petit (oui bon je suis pas fan de cet argument, ce que j'aurais fait ça aurait été de résoudre l'inéquation $\frac{n\pi}{2} \leq 1 - x^2 \leq \frac{n\pi}{2} + \pi$, puis de trouver le meilleur n).

On peut maintenant chercher la fonction inverse :

$$2 \sin(1 - x^2) = y \implies \sin(1 - x^2) = \frac{y}{2} \implies 1 - x^2 = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \implies x^2 = 1 - \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

Donc, puisque $0 \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$, x est positif, donc on trouve que :

$$x = \sqrt{1 - \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)} \implies f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Pour trouver son domaine de définition, $D(f^{-1}) = f(D)$ on peut simplement regarder les bornes de f , puisque cette fonction est croissante sur cet intervalle. On a :

$$f(0) = 2 \sin(1) \quad \text{et} \quad f\left(\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}\right) = -2$$

On a donc :

$$f : \left[0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}\right] \mapsto [-2, 2 \sin(1)] \implies D(f^{-1}) = [-2, 2 \sin(1)]$$

Mercredi 3 novembre 2021 — Cours 13 : Définition epsilon-delta des limites

Composition de fonctions

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : G \mapsto H$, où $E, F, G, H \subset \mathbb{R}$.

Si $f(E) \subset G$, alors on peut définir la fonction composée :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) : E \mapsto H$$

Si $f(G) \subset E$, alors on peut définir la fonction composée, avec l'autre ordre de composition :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) : G \mapsto F$$

L'ordre de composition est important.

Exemple

Soient les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto [-1, 1] & g : \mathbb{R} &\mapsto [-1, +\infty[\\ x &\mapsto \sin x & x &\mapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Puisque leur domaine de définition est $\mathbb{R}$, on n'a rien besoin de vérifier. On a donc :

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x^2 + 1}) = \sin(\sqrt{x^2 + 1}) : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$$

De plus :

$$g \circ f(x) = g(\sin x) = \sqrt{\sin^2 x + 1} : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty[$$

Remarque

Si $f : E \mapsto F$ est bijective, alors il existe une fonction réciproque $f^{-1} : F \mapsto E$. Les conditions sont remplies pour avoir une fonction composée des deux côtés. Pour rappel, la fonction réciproque a comme définition :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

On a donc :

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \implies f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in E$$

De plus :

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \implies f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in F$$

8.2 Limite d'une fonction

Définition du voisinage

Une fonction $f : E \mapsto F$ est définie au **voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset E$$

Remarque

En d'autres mots, elle est définie partout autour de x_0 (mais peut ou peut ne pas être définie à x_0).

Exemple

La fonction suivante est définie au voisinage de $x_0 = 0$, mais pas en x_0 :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Définition de la limite

Une fonction $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de x_0 admet pour **limite** le nombre réel ℓ lorsque x tend vers x_0 , si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ tels que $0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a :

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit que x et x_0 sont δ -proches, et que $f(x)$ et ℓ sont ε -proches.

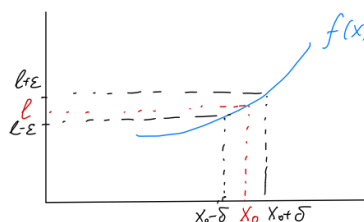
Notation

On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Intuition

Ce que cette définition veut dire c'est que pour n'importe quel écart vertical à la valeur de la limite, ε , alors il existe un ensemble centré sur x_0 tel que toutes les images de ces x soit dans l'écart vertical.



Il y a une très bonne vidéo de 3Blue1Brown qui parle de l'intuition derrière cette définition :

<https://www.youtube.com/watch?v=kfF40MiS7zA>.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = 3x - 1$, avec $x_0 = 1$. On veut démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut trouver $\delta > 0$ tel que :

$$0 < |x - 1| \leq \delta \implies |f(x) - 2| \leq \varepsilon$$

Étudions l'inégalité suivante :

$$|f(x) - 2| = |3x - 1 - 2| = |3x - 3| = 3|x - 1| \leq 3\delta$$

Or, on veut que $|f(x) - 2| \leq \varepsilon$. On peut donc prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$:

$$|x - 1| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{3} \implies |f(x) - 2| = 3|x - 1| \leq 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Donc, en d'autres mots, $\forall \varepsilon > 0$ on a trouvé $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tel que la définition de la limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ est satisfaite. On a donc démontré que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$$

□

Proposition (Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites)

Soit $f : E \mapsto F$, et A l'ensemble des suites $(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \forall (a_n) \in A, \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$$

Preuve si

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\exists \delta$ tel que, pour tout x :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit (a_n) , une suite dont la limite est x_0 , et telle que $a_n \neq x_0$ pour tout n . Puisqu'on sait que sa limite est x_0 , on sait que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - x_0| \leq \delta$$

En prenant $x = a_n$, cela implique donc par la première inégalité ci-dessus que

$$\forall n \geq n_0, |f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon \xrightarrow{\text{déf}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$$

Seulement si

Nous allons faire une preuve par la contraposée. Nous supposons donc que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \ell$, et nous voulons montrer qu'il existe une suite $(a_n) \in A$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \ell$.

La fonction n'admet pas pour limite ℓ lorsque x tend vers x_0 , donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$ il existe un x pour lequel :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

Alors, on va construire une suite $(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \ell$.

Prenons le $\varepsilon > 0$ dont on connaît l'existence. Puisque l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\delta > 0$, on peut construire la suite suivante :

$$\delta = 1 \implies \exists a_1 \in E \text{ tel que } 0 < |a_1 - x_0| \leq 1 \text{ et } |f(a_1) - \ell| > \varepsilon$$

$$\delta = \frac{1}{2} \implies \exists a_2 \in E \text{ tel que } 0 < |a_2 - x_0| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |f(a_2) - \ell| > \varepsilon$$

On continue comme ça jusqu'à l'infini. Ainsi, le n -ème terme de notre suite est donné par :

$$\delta = \frac{1}{2^{n-1}} \implies \exists a_n \in E \text{ tel que } 0 < |a_n - x_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi on voit que, pour n'importe quel $\varepsilon' > 0$, on peut trouver un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, alors $|a_n - x_0| \leq \varepsilon'$. Donc, par la définition de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on avait trouvé que $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon$. Donc, nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \ell$$

Remarque

“Toute suite” dans la définition est très important.

En effet, soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas. Cependant, la suite $(a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Corollaire

Soit $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de x_0 . Supposons que pour toute suite $(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, la suite $(f(a_n))$ converge.

Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

Preuve

Supposons par l'absurde que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas. En d'autres mots, on sait par la caractérisation des suites qu'il existe deux suites $(a_n), (b_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, mais :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Soit la suite suivante :

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ pair} \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ impair} \end{cases}$$

On remarque que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0$, puisque toutes ses sous-suites convergent vers x_0 . De plus, par notre hypothèse :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n+1})$$

Cependant, cela veut donc dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n+1})$$

Or, par la contraposée du théorème de la convergence des sous-suites, cela veut dire que $f(c_n)$ ne converge pas, ce qui est une contradiction puisqu'elle devrait converger par hypothèse, car c_n converge vers x_0 .

□

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Soit (x_n) une suite arbitraire convergente vers x_0 où $x_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_n = x_n - x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x_0 = x_0 - x_0 = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + a_n)^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0^p + \underbrace{\binom{p}{1} x_0^{p-1} a_n + \dots + \binom{p}{p} a_n^p}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= x_0^p \end{aligned}$$

On en déduit que, par la caractérisation :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p$$

Proposition (unicité de la limite)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2$, alors :

$$\ell_1 = \ell_2$$

Preuve

Supposons que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2$$

Donc, par la caractérisation des suites, on sait que toutes suites $(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ convergentes vers x_0 , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell_2$$

Par l'unicité de la limite d'une suite, on a $\ell_1 = \ell_2$.

□

Proposition (Critère de Cauchy pour les fonctions)

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$\forall x_1, x_2 \in \{x \in E \text{ tel que } 0 < |x - x_0| \leq \delta\} \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

Autre formulation

En d'autres mots, pour tout écart vertical arbitraire à la limite, il existe un écart horizontal à x_0 , tel que pour toute paire de nombres x_1 et x_2 δ -proche de x_0 , alors elles leur image sont ε -proches.

Proposition (opérations algébriques sur les limites)

Soient $f : E \mapsto \mathbb{R}$ et $g : E \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1 \ell_2$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ si $\ell_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 .

Preuve

On peut utiliser la caractérisation à partir des suites.

Limite de polynômes

Pour tout polynôme et fonction rationnelle,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf les zéros du dénominateur de $f(x)$.

Idée de preuve

On a démontré que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

On peut utiliser ce fait avec les opérations algébriques.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4}{x^2 + 2x + 5} = \frac{3(2) - 4}{(2)^2 + 2(2) + 5} = \frac{2}{13}$$

Continuité

Ce fait implique que ces fonctions sont continues partout sauf aux zéros de leur dénominateur.

Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

Soient $f, g, h : E \mapsto F$ telles que :

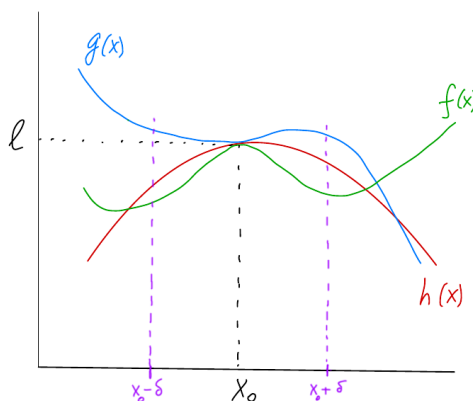
1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$
2. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in \{x \in E \text{ tel que } 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$ on a :

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

En d'autres mots, il existe un α tels que pour tout x α -proche de x_0 , la relation d'ordre ci-dessus est tenue.

Alors, si ces deux propriétés sont tenues,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$$



Preuve

Soit la suite arbitraire suivante :

$$(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

Par la définition de la limite des suites, en prenant $\varepsilon = \alpha$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|a_n - x_0| \leq \alpha, \quad \forall n \geq m$$

Ainsi, puisque a_n est α -proche de x_0 pour tout $n \geq m$, on peut en déduire par notre deuxième hypothèse :

$$f(a_n) \leq h(a_n) \leq g(a_n) \quad \forall n \geq m$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, on a par la caractérisation à partir des suites que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \ell$$

On peut en déduire par les deux gendarmes pour les suites que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = \ell$$

Or, puisqu'on a pris une suite $(a_n) \subset E \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ quelconque, on sait que c'est vrai pour toute suite (a_n) suivant ces hypothèses. Ainsi, par la caractérisation à partir des suites :

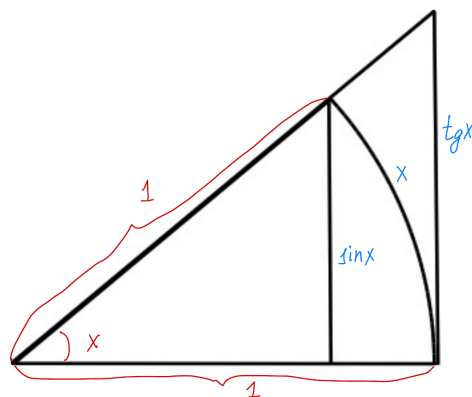
$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$$

□

Lundi 8 novembre 2021 — Cours 14 : Limites vers l'infini, de tous genres

Exemple (important) On veut calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$



En regardant le dessin, on remarque géométriquement que :

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$$

Donc, en divisant par $|\sin x|$

$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \left| \frac{1}{\cos x} \right|$$

Or, sur l'intervalle ci-dessus, on sait que x et $\sin(x)$ ont toujours le même signe, et on sait que $\cos x$ est positif. Donc :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

On veut maintenant calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

Ce serait très simple si on avait déjà défini la continuité, mais on ne l'a pas encore vue. On remarque que :

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) \implies 1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$$

On a donc :

$$|1 - \cos x| = 2 \left| \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right| = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

On peut utiliser les deux gendarmes :

$$0 \leq |1 - \cos x| \leq \underbrace{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}_{\rightarrow 0} \implies \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

On peut maintenant utiliser les deux gendarmes sur notre résultat obtenu plus tôt :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\rightarrow 1}} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□

Remarque

Cette limite est très importante, nous l'utiliserons même pour démontrer la dérivée du sinus et du cosinus.

Notez qu'une méthode d'ingénieur pour s'en souvenir c'est que $\sin(x) = x$ pour les petits angles. Ainsi, puisqu'on fait tendre l'angle vers 0, le ratio tend vers :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Notez que ceci est tout sauf une démonstration formelle de cette égalité, c'est plus un moyen mnémotechnique. De toutes façons, l'approximation qu'on fait en physique vient des polynômes de Taylor et donc de la dérivée du sinus. Puisqu'on aura besoin de cette limite pour démontrer cette dérivée, on ne pourrait même pas utiliser cette approximation pour démontrer cette limite, même de manière informelle.

Théorème (limite de la composée de deux fonctions)

Soit $f : E \mapsto F$ et $g : G \mapsto H$ telles que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$$

De plus, supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \alpha \implies f(x) \neq y_0$$

Alors, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$$

Remarque

On a besoin de la deuxième supposition, parce que potentiellement $g(y)$ n'est pas définie en y_0 .

Preuve

Puisqu'on sait que $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell$, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que :

$$0 < |y - y_0| \leq \delta_1 \implies |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Aussi, on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$. On peut prendre $\varepsilon_2 = \delta_1$ dans la définition de la limite (puisque c'est vrai pour tout ε_2 , ça l'est aussi pour un ε précis) : on sait que pour $\delta_1 > 0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel

que :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta_2 \implies |f(x) - y_0| \leq \delta_1$$

Soit $\delta = \min\{\alpha, \delta_2\}$. Alors, pour tout $x \in E$:

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \leq \delta_2 \implies |f(x) - y_0| \leq \delta_1$$

De plus, par hypothèse :

$$0 < |x - x_0| < \delta \leq \alpha \implies f(x) \neq y_0$$

On peut en déduire des deux hypothèses ci-dessus :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \implies 0 < |f(x) - y_0| \leq \delta_1$$

On peut donc en déduire par la première inégalité qu'on avait dérivée, en prenant $y = f(x)$:

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple 1

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2 + \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x)}{3x^2 + \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{3 + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{\rightarrow 1}} = \frac{1}{2}$$

En d'autres mots, ici nous avons considéré le changement variable $y = \frac{\sin x}{x}$. Donc, puisque y tend vers 1 quand x tend vers 0, on avait :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}{3 + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{2y^2}{3 + y^2} = \frac{1}{2}$$

En pratique, on n'écrit pas ce changement de variable explicitement.

Exemple 2

On veut démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que :

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$$

Étudions la seconde inégalité. Puisque $\sqrt{x} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x_0}|} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$

Ainsi, on peut prendre $\delta = \sqrt{x_0}\varepsilon$ et on obtient :

$$0 < |x - x_0| < \delta = \sqrt{x_0}\varepsilon \implies |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}\varepsilon}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon$$

Ainsi, on a démontré par la définition de la limite que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

□

Exemple 3

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - 1}$$

La première chose à faire est d'utiliser la propriété qu'on a démontré ci-dessus pour calculer ce que donne cette limite. On trouve $\frac{0}{0}$, qui est une forme indéterminée. Nous devons donc faire plus de travail, multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué des deux différences de racines :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 1}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{2-x}^{-1}}{x-2} \frac{\overbrace{\sqrt{x-1}+1}^{-1}}{\underbrace{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}_{\rightarrow 2}} = -\frac{1}{2}$$

Ce que nous avons fait ici c'est de prendre la fonction $g(y) = \sqrt{y}$, en sachant que $\lim_{y \rightarrow y_0} \sqrt{y} = \sqrt{y_0}$, avec $f_1(x) = x+2$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x-1$. Or, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f_2(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = 1$$

Donc, par le théorème de la composition de fonction :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f_1(x)} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f_2(x)} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f_3(x)} = 1$$

Exemple 4

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

On remarque que :

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2 - 1) = (x-1)^2(x+1)$$

Donc, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin((x-1)^2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

On peut ainsi prendre le changement de variable $f(x) = (x-1)^2$ et $g(y) = \frac{\sin y}{y}$.
Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Remarque

Par le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, nous avons que, pour toute fonction $t(x)$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$, et qu'il existe un voisinage de $x = a$ dans lequel $t(x) \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(t(x))}{t(x)} = 1$$

Exemple 5

Nous voulons démontrer que la limite suivante n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Son domaine de définition est donné par $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous pouvons utiliser la contraposée de la caractérisation des limites à partir des suites ; il nous faut donc trouver deux suite (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

Prenons $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Clairement, sa limite est 0. D'autre part :

$$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(2\pi n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$$

Prenons aussi $b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Clairement, sa limite est aussi 0. De plus :

$$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1$$

On peut donc en déduire par la caractérisation des suites que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Exemple 6

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le domaine de définition est $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a :

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \implies 0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \implies 0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

Puisque les deux bornes tendent vers 0 quand x tend vers 0, on obtient par les deux gendarmes que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

8.3 Limites lorsque x tend vers $\pm\infty$

Définition du voisinage

Soit $f : E \mapsto F$. On dit qu'elle est définie au voisinage de $+\infty$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]\alpha, +\infty[\subset E$.

De la même manière, on dit qu'elle est définie au voisinage de $-\infty$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, \alpha[\subset E$.

Définition de la limite

On dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $+\infty$ admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E, x \geq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f admet une asymptote horizontale $y = \ell$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

De la même manière, on dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $-\infty$ admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in E, x \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f admet une asymptote horizontale $y = \ell$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Exemple

Nous voulons montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, il nous faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq \alpha$, alors :

$$\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon \implies \frac{1}{\varepsilon} \leq x^2$$

Puisque $x \rightarrow \infty$, on peut supposer que $x > 0$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x$$

On peut poser $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. On remarque donc que :

$$x \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \implies \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Et donc, par la définition de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

8.4 Limites infinies

Définition

$f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow x_0$ si pour tout $A > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

De la même manière, on dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow x_0$ si pour tout $A > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \leq -A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Exemple 1

Nous voulons montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Soit $A > 0$, il nous faut trouver $\delta > 0$ tel que $0 < |x| \leq \delta$ implique :

$$\frac{1}{x^2} \geq A \implies \frac{1}{|x|} \geq \sqrt{A} \implies |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$$

On peut donc poser $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. En effet :

$$|x| \leq \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \implies \frac{1}{x^2} \geq A$$

Donc, par la définition de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Exemple 2

On veut montrer que la limite suivante n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Dans tout voisinage de 0, il existe x_1, x_2 tels que $x_1 < 0 < x_2$ et pour tout $M > 0$, on a

$$\frac{1}{x_1} < -M \iff \frac{1}{x_2} > M$$

8.5 Limites infinies lorsque x tend vers $\pm\infty$

Définition

On dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $+\infty$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq \alpha \implies f(x) \geq A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De la même manière, on dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $+\infty$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq \alpha \implies f(x) \leq -A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Semblablement, on dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $-\infty$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq \alpha \implies f(x) \geq A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Mêmeement (oui c'est un mot qui existe), on dit que $f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $-\infty$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ si :

$$\forall A > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq \alpha \implies f(x) \leq -A$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple

Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

8.6 Toutes les limites

Récapitulatif

On a défini quatre types de limites :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

Tous les résultats obtenus pour $\lim_{x \rightarrow x_0}$ restent valable pour $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

Formes indéterminées

- $\infty - \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$

- 0^0
- 1^∞
- ∞^0

Nous verrons les trois dernières plus tard, quand nous aurons défini les puissances réelles.

Exemple 1

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

On remarque qu'elle est de la forme indéterminée $(\infty - \infty)$. Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x}$$

Puisque la limite tend vers $+\infty$, $x > 0$ et on en déduit que $|x| = x$. De là, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow 0}} + 1 \right)} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1$$

Exemple 2

Étudions une limite très proche de celle étudiée dans l'exemple ci-dessus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$$

On a à nouveau la forme indéterminée $(\infty - \infty)$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}$$

Cette fois, $x \rightarrow -\infty$, donc $|x| = -x$. On obtient donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow 0}} + 1 \right)} = \frac{2}{-(\sqrt{1} + 1)} = -1$$

Mercredi 10 novembre 2021 — Cours 15 : Exponentielle et logarithme cupide

Exemple 3

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x \tan(x)}$$

On se rend compte que c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x \tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3x^2 \cos(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(3x^2)}{3x^2}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{3x}{x}}_{\rightarrow 3} \underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\cos(x)}_{\rightarrow 1} = 3$$

Il est mieux de ne pas “jeter la limite morceau par morceau” à chaque fois qu'on a une limite qu'on connaît, on ne doit pas la simplifier directement. En effet, la

Propriétés des limites infinies

plupart de nos propriétés ne fonctionnent que si nos limites existent. “Il ne faut pas économiser du papier.” (Prof. Lachowska)

Ces propriétés fonctionnent de la même manière quand on a $x \rightarrow \pm\infty$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

3. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et que $g(x)$ est bornée au voisinage de x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \pm\infty$$

4. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty, & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

5. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

6. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } f(x) > 0 \ \forall x \text{ au voisinage de } x_0 \\ -\infty, & \text{si } f(x) < 0 \ \forall x \text{ au voisinage de } x_0 \\ \text{n'existe pas autrement} \end{cases}$$

Exemple pour le point (3)

Si on a $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = +\infty$$

Exemple pour le point (4)

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(2x-1)}_{\rightarrow -1} \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Exemple pour le point (5)

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} (-x)^2 = 0$ et que $-x^2 < 0$ autour de 0, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$$

On sait aussi que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, mais puisqu'il n'existe pas de voisinage où $f(x)$ est positif ou négatif, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Théorème du gendarme pour les limites infinies

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et que $g(x) \geq f(x)$ pour tout x au voisinage de x_0 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

De la même manière, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et que $g(x) \leq f(x)$ pour tout x au voisinage de x_0 , alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

Remarque Ce théorème fonctionne aussi quand $x \rightarrow \pm\infty$.

8.7 Limites à droite et à gauche

Définition

$f : E \mapsto F$ est définie à droite de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$.
Même, $f : E \mapsto F$ est définie à gauche de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$.

Définition des limites à droite et à gauche

$f : E \mapsto F$ définie à droite de x_0 admet pour limite à droite de x_0 le nombre réel ℓ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$0 < x - x_0 \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note :

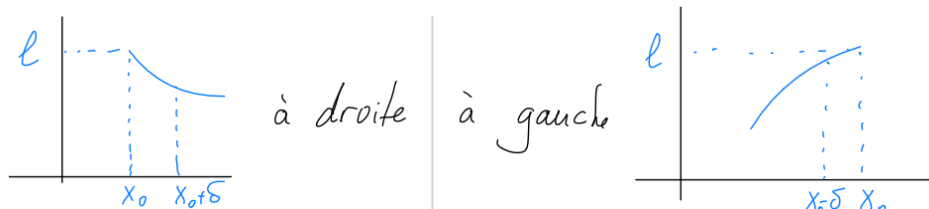
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

De manière similaire, $f : E \mapsto F$ définie à gauche de x_0 admet pour limite à gauche de x_0 le nombre réel ℓ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$



Remarque C'est la même définition que ce que les limites "normales", sauf que nous enlevons les valeurs absolues.

Observation On remarque que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

On peut démontrer les deux directions de l'implication à l'aide de la définition de ces limites.

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Par la contraposée notre observation ci-dessus, il en découle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas. Cependant, il faut tout de même faire attention : si notre fonction n'a pas de limite à un point, alors elle n'a pas forcément de limites sur la gauche et sur la droite de ce point. Par exemple, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow 0$.

Il est intéressant de remarquer que si on avait pris la fonction suivante, le résultat aurait été le même. La fonction n'aurait même pas eu besoin d'être définie en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 3, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Remarque

On peut aussi définir les limites :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

La définition est similaire à celle qu'on avait vues, sans les valeurs absolues.

Exemple

Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

8.8 Fonction exponentielle et logarithmique

Définition fonction exponentielle

Nous définissons :

$$e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Rappel

On sait que cette série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Convention

On prend $0^0 = 1$ et $0! = 1$.

Remarque par rapport à 0^0

Il faut faire attention avec 0^0 , ce n'est pas une forme indéterminée, puisqu'on parle de nombres exactes, pas de limites.

On peut justifier cette convention avec :

$$0^0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=0} = \frac{1}{1-x} \Big|_{x=0} = 1$$

Il est important de noter que ce résultat n'est pas un consensus dans la communauté mathématique, certains mathématiciens pensent que 0^0 ne devrait pas être défini.

Remarque par rapport à $0!$

Nous pouvons justifier cette convention en remarquant que, pour $n \geq 1$:

$$n! = n(n-1)! \implies (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Donc, en prenant $n = 1$:

$$0! = (1-1)! = \frac{1!}{1} = 1$$

Une autre justification est de voir qu'il y a une unique manière de choisir 0 éléments d'un ensemble de n éléments différents. Donc :

$$1 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{0!} \implies 0! = 1$$

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1. \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
 3. $e^x > 0$

*Preuve du
point (1)*

Nous avons :

$$e^x e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!} = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \dots\right)$$

Nous voulons regrouper les termes de manière à ce que la somme de la puissance de x et de la puissance de y soient égales (pour faire une preuve complètement formelle, il faudrait justifier ce point plus en détails) :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k+p=m} \frac{x^k}{k!} \frac{y^p}{p!} \right)$$

Par exemple, si $m = 3$, alors on aurait :

$$\sum_{k+p=3} \frac{x^k}{k!} \frac{y^p}{p!} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \frac{y^1}{1} + \frac{x}{1} \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}$$

Maintenant, on peut prendre $p = m - k$ comme changement de variable :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!(m-k)!} x^k y^{m-k}$$

On remarque que c'est très proche de la formule binomiale. Puisque dans la somme interne m est constant, on peut multiplier et diviser par $m!$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k y^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m = e^{x+y}$$

par la définition de l'exponentielle.

*Preuve du
point (2)*

Par la propriété (1), on a :

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1$$

On en déduit que :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

On peut aussi en déduire que $e^x \neq 0$ pour tout x . En effet, sinon, la réciproque n'existerait pas pour ces x (on ne peut pas diviser par zéro (très bon morceau de *The Offspring* btw)).

*Preuve du
point (3)*

Par la propriété (1) :

$$e^x = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$$

De plus, puisque $e^x \neq 0$ par le point (2), alors on sait que :

$$e^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observation

On remarque qu'on n'a uniquement eu besoin de la première propriété pour montrer les deux autres.

Note personnelle : C'est réellement la propriété la plus puissante de l'exponentielle. En effet, encore beaucoup d'autres propriétés découlent de celle-ci. Par exemple, à l'aide de la limite qu'on verra un petit peu plus bas (qui est une propriété du nombre e , pas particulièrement de l'exponentielle), on peut utiliser cette propriété pour démontrer que :

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

De plus, comme mentionné plus tôt dans ces notes, la définition de l'exponentielle complexe découle aussi uniquement de cette propriété :

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

En d'autres mots, le fait que $e^{x+y} = e^x e^y$ est une propriété extrêmement puissante qu'on peut quasiment uniquement utiliser pour définir l'exponentielle (et on peut utiliser la limite qu'on verra un petit peu plus bas pour faire la différence entre e^x et a^x , où a est un réel positif quelconque).

Propriétés

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
3. $(e^x) \uparrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On en déduit que $e^x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est injective, puisqu'elle est strictement croissante. On verra aussi plus tard qu'elle est surjective, et nous n'utiliserons pas ce que nous allons faire ci-dessous pour le démontrer, donc nous allons, pour l'instant, simplement le prendre comme tel.

Ainsi, on sait que $e^x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est bijective.

Preuve du point (1)

On a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{k=1}{\geq} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

puisque tous les autres termes de la somme sont positifs.

Preuve du point (2)

Nous avons, en prenant $y = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{e^y}}_{\rightarrow +\infty} = 0$$

Preuve du point (3)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > y$. Nous avons :

$$e^{x-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!} > 1$$

puisque pour tout $k > 0$, les termes de la somme sont strictement positifs (on peut donc uniquement prendre le premier terme).

Ainsi, on en déduit que :

$$e^{x-y} > 1 \implies e^x \frac{1}{e^y} > 1 \implies e^x > e^y$$

Et donc que e^x est croissante (puisque'on avait pris $x > y$ au début de la preuve).

Proposition

La limite suivante est remarquable :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve

Nous allons démontrer cette limite à l'aide du théorème des deux gendarmes sur la fonction suivante :

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right|$$

Si nous trouvons une expression majorante de cette fonction et qui tend vers 0, alors nous aurons trouvé notre résultat par les deux gendarmes. Travaillons dessus :

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 \right|$$

Or, puisque x est constant dans la somme, c'est égal à :

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|x|^{k+1}}{k!} = |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!}$$

Puisque $k! > (k-2)!$, on en déduit que :

$$|x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}$$

Ainsi, en prenant $n = k - 2$:

$$|x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| e^{|x|} < \underbrace{|x|e}_{\rightarrow 0}$$

En effet, puisqu'on s'intéresse à la limite quand $x \rightarrow 0$, alors on a $|x| < 1$.

On peut bien en déduire par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - 1 = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

□

Généralisation

On remarque que, si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$, et si $t(x) \neq 0$ au voisinage de $x = a$, alors, par le théorème de combinaison de limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1$$

Note personnelle

On peut retrouver cette limite si on se souvient que $(e^x)' = e^x$ et de la définition de la dérivée. En effet :

$$(e^x)' : \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^x e^{dx} - e^x}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^{dx} - 1}{dx}$$

Or, pour que ce soit égal à e^x , on en déduit forcément que :

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx}$$

Notez qu'on utilise normalement cette limite pour démontrer la dérivée de l'exponentielle, et non l'inverse. Ceci est seulement une méthode pour la retrouver en cas d'oubli.

Fonction réciproque

On sait que $e^x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est bijective, donc on peut définir la fonction réciproque. On appelle cette fonction le logarithme naturel, ou logarithme Népérien (il est intéressant savoir que cette référence à John Napier n'est faite qu'en français, "Neperian Logarithm" ne veut rien dire en anglais).
On sait donc qu'il existe $\log(x) : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$e^x = y \iff x = \log(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Propriétés

1. $e^{\log(x)} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\log(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
4. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
5. $\log(x^r) = r \log(x), \quad \forall r \in \mathbb{N}^*$
6. $\log(1) = 0$
7. $\log(e) = 1$

Preuve du point (3)

On a :

$$e^{\log(x) + \log(y)} = e^{\log(x)} e^{\log(y)} = xy = e^{\log(xy)}$$

En prenant un log des deux côtés.

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy)$$

Les autres démonstrations sont très similaires et considérées triviales, et donc (naturellement) laissées en exercice au lecteur ;).

8.9 Retour de la caractérisation des limites à partir des suites

Remarque

Si on a une fonction et une suite telles que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = m$$

C'est aussi vrai dans l'autre direction, mais dans ce cas c'est pour toute suite, et donc c'est moins intéressant.

Exemple

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n! - \sqrt{(n!)^2 - n!} \right)$$

Considérons la limite ci-dessous :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = \frac{1}{2}$$

Donc, en prenant $a_n = n!$, on peut en conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n!) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$.

8.10 Fonctions continues

8.10.1 Continuité

Définition de la continuité Une fonction $f : E \mapsto F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cela nous donne trois conditions pour qu'une fonction soit continue :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe
2. f est bien définie en $x = x_0$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Interprétation graphique Les images des valeurs autour de x_0 s'approchent de $f(x_0)$. En d'autres mots, on peut tracer la fonction sans lever le crayon autour de x_0 .

Exemples de fonctions continues

1. $f(x) = x^p$ où $p \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser les opérations algébriques sur les limites).
3. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine.
4. $f(x) = \sqrt[p]{x}$ est continue sur son domaine pour tout $p \in \mathbb{N}$.
5. $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Preuve pour le point (5) Nous voulons montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$$

On a :

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= \left| \sin\left(\frac{x+a}{2} + \frac{x-a}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &= \left| \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cos\left(\frac{x-a}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cos\left(\frac{x-a}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\leq 1} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \underbrace{\left| \frac{x-a}{2} \right|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow a} |\sin x - \sin a| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = 0$$

Ce qui nous permet de conclure que $\sin(x)$ est continue :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

Critère de Cauchy pour les fonctions continues

$f : E \mapsto F$ définie au voisinage de $x = x_0$ et en x_0 . f est continue en $x = x_0$ si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in \{x \in E \text{ tel que } |x - x_0| \leq \delta\}$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$

Reformulation En d'autres mots, pour tout écart vertical ε , il existe un écart horizontal δ tel que pour toute paire de nombre, où les deux nombres sont delta-proches de x_0 , leur image sont epsilon-proches.

Continuité sur le côté

$f : E \mapsto F$ est dite continue à droite en $x_0 \in E$ si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Même, $f : E \mapsto F$ est dite continue à gauche en $x_0 \in E$ si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Remarque On voit que f est continue en $x = x_0$ si et seulement si elle est continue à gauche et à droite.

Exemple 1

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Nous voulons étudier la continuité en $x = 0$. Pour commencer, on voit que f est bien définie à ce point. Nous pouvons maintenant calculer les limites sur le côté :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ainsi, en combinant ces deux résultats on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

De plus, puisque cette limite est égale à $f(0)$, la fonction est continue en $x = 0$.

Exemple 2

Prenons maintenant une fonction très similaire à celle ci-dessus, mais avec une petite différence :

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

On remarque que, comme la dernière fois :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Cependant, puisque $g(0) = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, on en déduit que $g(x)$ n'est pas continue en $x = 0$.

Opérations algébriques sur les fonctions continues

Si f et g sont continues en $x = x_0$, alors :

1. $\alpha f + \beta g$ est continue en $x = x_0$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f \cdot g$ est continue en $x = x_0$.

3. $\frac{f}{g}$ est continue en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$ (puisque g est continue, ça veut donc dire que la limite n'est pas 0 en x_0 donc c'est effectivement tout bon).

De plus, soient $f : E \mapsto F$ et $g : G \mapsto H$ où $f(E) \subset G$. Si f est continue en $x_0 \in E$ et g est continue en $f(x_0) \in G$, alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .

Remarque Si $(g \circ f)$ est continue en $x = x_0$, alors on ne sait rien sur la continuité de f en x_0 et de g en $f(x_0)$.

Exemple

On sait que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5} + \cos(x)}$$

8.10.2 Prolongement par continuité d'une fonction en un point**Définition**

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction telle que $c \notin E$ (f n'est pas définie en $x = c$) et :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R} \text{ existe}$$

Alors, la fonction $\hat{f} : E \cup \{c\} \mapsto F$:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c \end{cases}$$

Cette fonction est appelée **le prolongement par continuité** de f au point $x = c$. S'il existe, un tel prolongement est unique (puisque la limite est unique), et la fonction $\hat{f}$ est continue en $x = c$.

Note C'est une question courante en examen.

Exemple 1

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Son domaine est donné par $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ainsi, le prolongement par continuité est donné par :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Exemple 2

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{e^{2x} - 1}$$

La fonction est définie sur $D(f) = [-4, +\infty[\setminus \{0\}$. On veut trouver le prolongement par continuité en $x = 0$ s'il existe. On remarque que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}+2} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{e^{2x}-1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

On peut donc définir :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{e^{2x}-1}, & x \in [-4, +\infty[\setminus \{0\} \\ \frac{1}{8}, & x = 0 \end{cases}$$

On a $D(\hat{f}) = [-4, +\infty[$.

8.10.3 Fonctions continues sur un intervalle

Définition

Une fonction $f : I \mapsto F$ — où I est un intervalle ouvert non-vidé — est **continue sur I** si f est continue en tous point $x \in I$.

Une fonction $f : [a, b] \mapsto F$, avec $a < b$, est **continue sur $[a, b]$** si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en $x = a$ et à gauche en $x = b$.

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+3}, & x \neq -\frac{3}{2} \\ 0, & x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\frac{3}{2}, 5[$, sur $[-1, 5]$ et sur $]-\frac{3}{2}, \infty[$. Cependant, elle n'est pas continue sur $[-\frac{3}{2}, 5]$.

Théorème (très important)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \mapsto F$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$.

Alors, f atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$.

Remarque

C'est équivalent à dire que :

$$\exists \max_{[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad \exists \min_{[a,b]} f(x)$$

Exercice au lecteur

Démontrer que f est bornée (sans utiliser le théorème, c'est un point qu'on utilise pour démontrer ce théorème).

Étude des hypothèses du théorème (1)

Pour ce théorème, nous avons besoin que notre fonction soit **continue** sur un intervalle *fermé et borné*.

Si notre fonction n'est pas continue, on pourrait par exemple avoir :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Son supremum sur l'intervalle $[-1, 1]$ est 2, mais il n'existe pas de x tel que $f(x) = 2$, donc la fonction n'atteint pas son supremum.

On pourrait aussi avoir :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est clairement pas continue en $x = 0$ et, puisqu'elle n'est pas bornée, son supremum sur $[0, 1]$ n'existe pas.

Étude des hypothèses du théorème (2)

Pour ce théorème, nous avons besoin que notre fonction soit *continue* sur un intervalle **fermé et borné**.

Si notre fonction est définie sur un intervalle ouvert :

$$f(x) = -x^2, \quad]-1, 1[\mapsto \mathbb{R}$$

Son infimum sur cet intervalle est 1, mais la fonction ne l'atteint pas sur $] -1, 1[$

On pourrait aussi avoir une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad]0, 1] \mapsto \mathbb{R}$$

Le suprémum de cette fonction n'existe pas sur $]0, 1]$.

Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors, f atteint son suprémum, son infimum, et toutes les valeurs comprises entre les deux.

Remarque 1 Une autre écriture de ce théorème est de dire que

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right]$$

Remarque 2 Une autre écriture équivalente du théorème est :

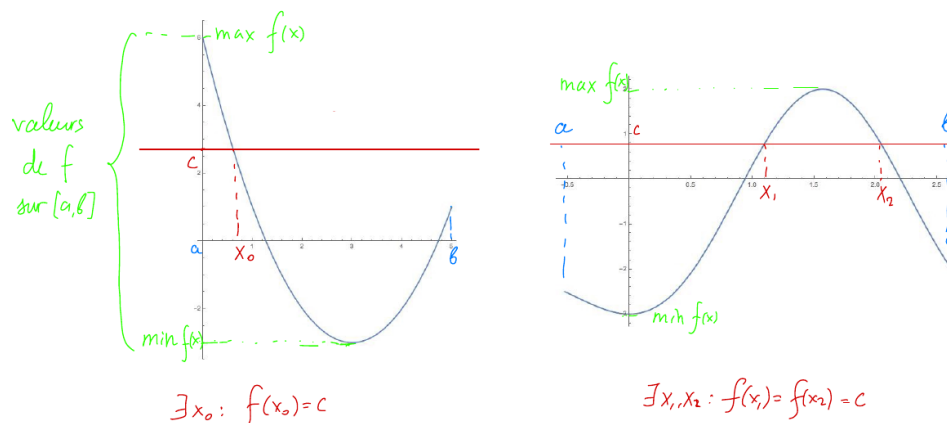
$$\forall c \in \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right], \quad \exists x \text{ tel que } f(x) = c$$

Il existe au moins un tel x , il pourrait y en avoir plus.

Observation En particulier, on remarque que f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (même si ce ne sont pas les suprémums et infimums).

Preuve La preuve de ce théorème est très difficile et absolument pas considérée comme triviale. Puisque c'est probablement la preuve la plus difficile du cours, elle n'est pas laissée en exercice au lecteur.

Exemple



Corollaire 1

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés et sont non-nuls).

Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Utilité

On peut utiliser ce théorème pour démontrer qu'au moins une solution existe.

De plus, on peut utiliser ce théorème pour écrire un algorithme permettant d'estimer un zéro d'une fonction. En effet, en divisant la taille de l'intervalle par 2, on peut savoir dans lequel des deux sous-

intervalles il y a une solution, et ainsi pouvoir s'en approcher de plus en plus. On appelle cet algorithme une méthode de Dichotomie (il est moins efficace que la méthode de Newton, mais a des hypothèses moins fortes), et voici son pseudocode :

```
// On suppose que la fonction est continue sur [a,b] et que
// f(a)*f(b) < 0.
procedure methode_dichotomie(f, a, b, erreur_max):
  while abs(b-a)/2 > erreur_max:
    c := (a + b)/2
    if f(c) == 0: return c
    else if f(c)*f(a) < 0: b := c
    else: a := c
  return (a + b)/2
```

Exemple 1

On veut démontrer que l'équation suivante possède au moins deux solutions sur $[0, \pi]$:

$$\sin(x) + \frac{1}{x-4} = 0$$

On remarque que $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{x-4}$ est continue sur $[0, \pi]$, qui est fermé borné ; donc, le théorème de la valeur intermédiaire s'applique. On remarque que les valeurs aux bornes sont négatives :

$$f(0) = \sin(0) + \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4} < 0$$

$$f(\pi) = \sin(\pi) + \frac{1}{\pi-4} = \frac{1}{\pi-4} < 0$$

Si on trouve une valeur positive entre les deux ce sera gagné. Essayons une valeur facile à calculer, $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} = 1 + \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-4}}_{< -2} > 0$$

Ainsi, puisque $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$, on sait qu'il existe au moins un $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que :

$$f(x_1) = 0$$

De plus, puisque $f(\frac{\pi}{2})f(\pi) < 0$, il existe au moins un $x_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tel que :

$$f(x_2) = 0$$

Finalement, on sait que $x_1 \neq x_2$ puisque $f(\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

On a donc démontré l'existence de 2 solutions à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exemple 2

On veut démontrer l'existence d'une solution à l'équation $\cos(x) = x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Prenons la fonction suivante :

$$f(x) = \cos(x) - x$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, alors le corollaire peut être appliqué si on trouve un bon intervalle. Regardons les valeurs des bornes :

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$$

Ainsi, par le TVI (ou par son corollaire), il existe au moins une solution de l'équation $\cos(x) = x$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On peut même faire mieux, calculons les valeurs à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Or, on peut regarder les carrés :

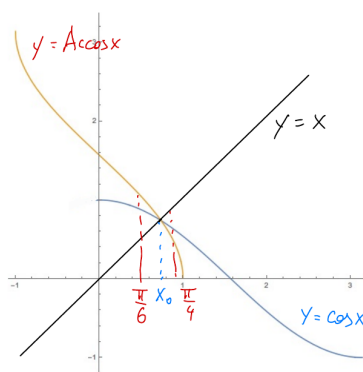
$$\frac{1}{2} < \frac{9}{16} \implies \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \implies \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

$$\frac{3}{4} > \frac{9}{16} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{4} \implies f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{> \frac{3}{4}} - \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{< \frac{3}{4}} > 0$$

Ainsi, on en déduit qu'une solution de $\cos(x) = x$ se trouve dans $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$.

De plus, on remarque que :

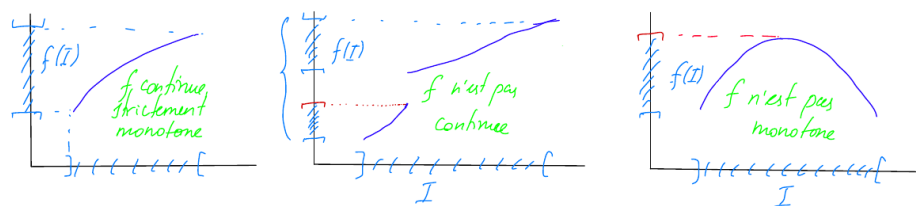
$$\cos(x_0) = x_0 \implies \cos(\cos(x_0)) = \cos(x_0) = x_0 \implies \cos(x_0) = \arccos(x_0)$$



_____ Lundi 22 novembre 2021 — Cours 17 : Des calculs de différences, c'est facile non ?

Corollaire 2

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors, $f(I)$ est un intervalle ouvert



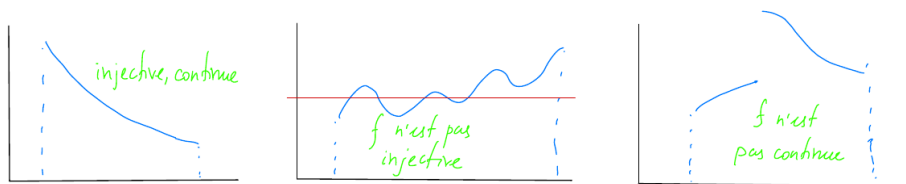
Étude des
hypothèses

Si la fonction n'est pas continue, alors $f(I)$ pourrait être l'union d'un intervalle ouvert et d'un intervalle semi-ouvert (voir image du milieu).

Si la fonction n'est pas strictement monotone, alors elle pourrait atteindre son maximum (par exemple), et donc $f(I)$ serait un intervalle semi-ouvert (voir image de droite (rire de droite)).

Corollaire 3

Toute fonction injective continue sur un intervalle est strictement monotone.



Étude des hypothèses

Si la fonction est continue mais pas injective, alors elle n'est pas forcément monotone (voir image du milieu).

On ne sait rien aussi si la fonction est injective mais pas continue (voir image de droite).

Corollaire 4

Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone.

Remarque

Le “strictement monotone” découle directement du fait que la fonction réciproque soit aussi bijective, donc on peut utiliser le corollaire 3.

Le point important est que si la fonction f est continue, alors f^{-1} est continue.

Chapitre 9

Calcul différentiel

9.1 Fonctions dérivables

Définition de fonction dérivable

Une fonction $f : E \mapsto F$ est dite **dérivable** en $x_0 \in E$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{déf}}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Cette limite est appelée la **dérivée** de f en x_0 , notée $f'(x_0)$.

Note personnelle

En faisant le changement de variable $h = x - x_0$, on a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cela peut être plus pratique pour les calculs.

Exemple 1

Soient la fonction $f(x) = x^2$ et $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

On obtient donc que :

$$(x^2)' = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

Soient $f(x) = \cos(x)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} - \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\rightarrow \sin(x_0)} \\ &= -\sin(x_0) \end{aligned}$$

On utilise la continuité de $\sin$ pour calculer cette limite.

On trouve donc que :

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

*Remarque
personnelle*

Je trouve personnellement qu'utiliser le changement de variable $h = x - x_0$ simplifie nos calculs :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0) \cos(h) - \sin(x_0) \sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos(x_0) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} - \sin(x_0) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\rightarrow 1} \right) \\ &= -\sin(x_0) \end{aligned}$$

Exercice au lecteur

Démontrer que :

- $(x^3)' = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Fonction différentiable

Si f est dérivable en $x = x_0$, on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x), \quad \text{où } r(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

On remarque que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0$$

Ainsi, on en déduit que toute fonction dérivable en $x = x_0$ admet une présentation :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x), \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

Dans ce cas, on dit que f est **différentiable** en x_0 .

Réciproquement, si :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x), \quad \text{tel que } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{a(x - x_0)}{x - x_0}}_{=a} + \underbrace{\frac{r(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow 0} = a$$

Ainsi, on en déduit que f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est différentiable en $x = x_0$, et $f'(x) = a$.

**Définition de
fonction dérivée**

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction dérivable sur un ensemble $D(f') \subset E$.

On définit la **fonction dérivée** :

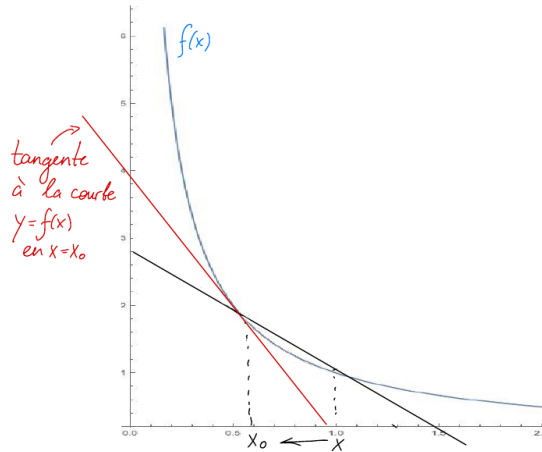
$$\begin{aligned} f' : D(f') &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemple

Voici les fonctions dérivées qu'on connaît :

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Interprétation géométrique



On voit que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la pente de la droite passant par $\langle x_0, f(x_0) \rangle$ et $\langle x, f(x) \rangle$. Donc, quand $x \rightarrow x_0$, on obtient la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$.

L'équation de la tangente est donnée par :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Définition des dérivées sur le côté

La **dérivée à droite** est définie par :

$$f'_d(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

De la même manière, la **dérivée à gauche** est définie par :

$$f'_g(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On remarque que $f'(x_0)$ existe si et seulement s'il existe $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$, et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Proposition

Une fonction dérivable en $x = x_0$ est continue en $x = x_0$.

Preuve

On voit que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f(x) - f(x_0)) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Pour calculer cette limite, on utilise que f est dérivable en x_0 .

□

Réciproque

La réciproque de cette proposition est fautive ; une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Par exemple, $f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

On peut donc en déduire que $|x|$ est continue en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

Calculons maintenant les dérivées sur le côté :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, on en déduit que $f'(0)$ n'existe pas.

Graphiquement, on voit qu'on peut bien dessiner $|x|$ sans lever le crayon, donc elle est continue, cependant elle n'est pas "lisse" en $x = 0$, il y a un angle, donc elle n'y est pas dérivable.

Remarque

On peut introduire la limite infinie si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

Puisque la limite n'existe pas, f n'est pas dérivable en $x = x_0$.

Dans ce cas, le graphique de f admet une tangente verticale en x_0 .

Exemple

Prenons la fonction suivante :

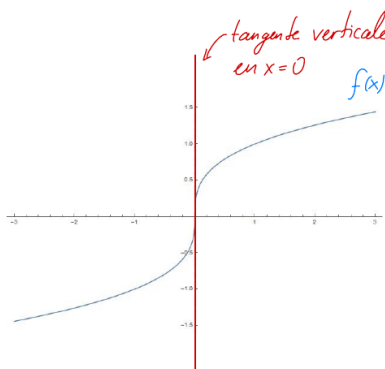
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

On a besoin de définir notre fonction comme ça car on a uniquement défini les racines n -èmes pour les x positifs. Calculons les dérivées sur le côté :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{|x|}}{x} \stackrel{y = -x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt[3]{y}}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

On en déduit que $f'(0) = +\infty$. On peut bien voir que, graphiquement, il y a une tangente verticale en $x = 0$.



Opérations algébriques sur les dérivées

Soient $f, g : E \mapsto F$ deux fonctions dérivables en $x = x_0$. Alors :

1. $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)},$ si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0

*Preuve du
point (3)*

Nous voulons montrer que, si $g(x_0) \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

On pourra alors utiliser ce fait avec la propriété (2) pour démontrer la propriété (3).

On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g^2(x_0)}} \\ &= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

On utilise que g est dérivable et que g est continue.

Exemple

Soit $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Par la propriété (3), on a :

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On en déduit donc que :

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

*Remarque
personnelle*

On remarque que :

$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Ces résultats seront très importants quand nous calculerons des intégrales.

Proposition

Soit $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve

On va démontrer ce fait par récurrence.

Initialisation : Prenons $n = 1$. Alors :

$$(x)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \implies (x)' = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Hérédité : Supposons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = nx^{n-1}x + x^n \cdot 1$$

On peut donc en déduire que :

$$(x^{n+1})' = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

Ainsi, par récurrence, la proposition $(x^n)' = nx^{n-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Proposition (dérivée de la fonction composée de deux fonctions dérivables)

Soient $f : E \mapsto F$ une fonction dérivable en $x = x_0 \in E$ et $g : G \mapsto H$ dérivable en $f(x_0)$, où $f(E) \subset G$.

Nous avons :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Preuve

Nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

Si $f(x) \neq f(x_0)$ au voisinage de x_0 , on peut prendre :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\rightarrow g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x)} = f'(f(x_0))f'(x_0)$$

Si $f(x) = f(x_0)$, alors les deux côtés sont nul :

$$\frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = 0 = g'(f(x_0)) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=0}$$

Donc, dans les deux cas, on a que cela tend vers $g'(f(x_0))f'(x_0)$.
Ainsi :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

□

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{\sin^2(x) + \cos^4(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos^4(x)}$$

Prenons le changement de variable $f(x) = \sin^2(x) + \cos^4(x)$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1 + f(x) - 1}{1 + f(x)} = 1 - \frac{1}{1 + f(x)}$$

Ainsi, on peut maintenant calculer la dérivée de g :

$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{1 + f(x)}\right)' = -\left(\frac{1}{1 + f(x)}\right)' = -\frac{-f'(x)}{(1 + f(x))^2} = \frac{f'(x)}{(1 + f(x))^2}$$

Nous voulons maintenant calculer la dérivée de f . Avant, nous pouvons voir le fait suivant :

$$(\sin^k(x))' = k(\sin(x))^{k-1} \cos(x), \quad (\cos^k(x))' = k(\cos(x))^{k-1}(-\sin(x))$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2(x) + \cos^4(x))' \\ &= 2\sin(x)\cos(x) + 4\cos^3(x)(-\sin(x)) \\ &= \sin(2x) - 2\sin(2x)\cos^2(x) \\ &= \sin(2x) \underbrace{(1 - 2\cos^2(x))}_{-\cos(2x)} \\ &= -\sin(2x)\cos(2x) \\ &= -\frac{\sin(4x)}{2} \end{aligned}$$

On peut donc finir de calculer g' :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{(1+f(x))^2} = -\frac{\sin(4x)}{2(1+\sin^2(x)+\cos^4(x))^2}$$

Mercredi 24 novembre 2021 — Cours 18 : Exponentielles, hyperboles et extrema

Exemple

Prenons la fonction suivante (donnée bout par bout par les étudiants de la salle) :

$$\frac{e^x \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{\log(\sin(x^2))}}{3x^4 - 2x^3 + x + 1}$$

Sa dérivée est alors donnée par :

$$\frac{\left(e^x \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{\log(\sin(x^2))}\right)(-12x^3 + 6x^2 - 1)}{(3x^4 - 2x^3 + x + 1)^2} + \frac{-\frac{2x \cos(x^2)}{\log(\sin(x^2))^2 \sin(x^2)} + e^x \log\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2e^x}{x}}{3x^4 - 2x^3 + x + 1}$$

Et on peut la simplifier, mais même si sympy me permet de la calculer, elle prend trois fois la taille maximale d'une ligne de ce document, et il n'y a aucun moyen de la couper proprement (et de toutes façons je parie que vous avez pas lu complètement l'équation ci-dessus).

On voit que calculer une dérivée c'est quelque chose qui peut être fait automatiquement. On peut calculer la dérivée de n'importe quelle fonction dont on a la formule.

Proposition (dérivée de la fonction réciproque)

Soient I un intervalle ouvert, et $f : I \mapsto F$ une fonction bijective continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$.

La fonction réciproque $f^{-1} : F \mapsto I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{où } y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Note

On sait que F est aussi un intervalle ouvert par continuité.

Preuve

f est continue et bijective sur I , donc on sait que f^{-1} est continue et bijective. On peut calculer sa dérivée :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}$$

Prenons le changement de variable $x = f^{-1}(y)$, donc $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Puisque $f^{-1}(y)$ est continue en y_0 , on sait que quand $y \rightarrow y_0$, $x \rightarrow x_0$. Notre limite est donc égale à :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

puisque $f'(x_0) \neq 0$.

Corollaire

Soient I et F , deux intervalles fermés. Si $f : I \mapsto F$ et $f^{-1} : F \mapsto I$ sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur (partout, sauf aux bornes), alors pour tout x à l'intérieur de F , tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Remarque

Il faut faire attention que la dérivée n'est *pas* donnée par :

$$(f^{-1})'(x) \neq \frac{1}{f'(x)}$$

C'est une erreur commune.

Note personnelle

La “méthode de physicien” pour retrouver ce fait est la suivante :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}$$

Exemple

Prenons la fonction $\arccos(x) : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$ et $\cos(x) : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$. On a bien :

$$y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$$

Donc :

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En effet, on sait que $\sin(y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(y)}$. Cependant, puisque $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$, on a que $\sin(\arccos(x)) > 0$. Ainsi, on choisit la version positive et on trouve notre résultat ci-dessus.

Dérivée de l'exponentielle

On veut calculer la dérivée de $f(x) = e^x$. On a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

Prenons le changement de variable $t = x - x_0$:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

On a donc trouvé que :

$$(e^x)' = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Puisque e^x est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est continue $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi, puisqu'on sait qu'elle est continue et strictement monotone, alors f (intervalle ouvert) = intervalle ouvert. Ainsi, en le mettant en commun avec ses limites, on trouve que $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. On en déduit donc que f est surjective.

Puisque $f(x) = e^x$ est continue, bijective et monotone, alors on sait qu'il existe une fonction inverse qui est continue, bijective et monotone :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) \end{aligned}$$

Dérivée du logarithme

Soit $f^{-1}(x) = \log(x)$, $f(y) = e^y$, avec $x > 0$. On veut calculer la dérivée du logarithme :

$$(\log(x))' = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\log(x)} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\log(x)} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$

Ainsi, on a trouvé que :

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$

Remarque

On peut définir la fonction suivante :

$$a^x \stackrel{\text{déf}}{=} e^{x \log(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

On peut aussi trouver la fonction réciproque :

$$y = e^{x \log(a)} \iff \log(y) = x \log(a) \iff x = \frac{\log(y)}{\log(a)}$$

On sait que $\log(a) \neq 0$ puisque $a \neq 1$. On définit donc :

$$\log_a(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\log(y)}{\log(a)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, a > 0, a \neq 1$$

Calculons leur dérivée :

$$(a^x)' = \left(e^{x \log(a)} \right)' = \log(a) e^{x \log(a)} = a^x \log(a)$$

$$(\log(a))' = \left(\frac{\log(x)}{\log(a)} \right)' = \frac{1}{x \log(a)}$$

Dérivée logarithmique

Soit $f(x) = f_1(x)^{f_2(x)}$. Nous voulons calculer sa dérivée. Pour commencer, utilisons la définition de l'exponentielle en base a :

$$f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} = e^{f_2(x) \log(f_1(x))}$$

On peut maintenant calculer sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{f_2(x) \log(f_1(x))} \right)' \\ &= e^{f_2(x) \log(f_1(x))} \left(f_2'(x) \log(f_1(x)) + f_2(x) \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \right) \\ &= f_1(x)^{f_2(x)} \log(f_1(x)) f_2'(x) + f_1(x)^{f_2(x)-1} f_1'(x) f_2(x) \\ &= f(x) (\log(f(x)))' \end{aligned}$$

De manière générale, on trouve donc que :

$$(f(x))' = f(x) (\log(f(x)))'$$

si le logarithme est bien défini.

Ce résultat est indispensable pour calculer les fonctions qui sous la forme $f_1(x)^{f_2(x)}$, et est très pratique si nous avons un très gros produit.

Exemple

Disons que nous voulons calculer la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\sin(x)}$$

On a que $x^2 + 1 > 0$ pour tout x , donc $\log(x^2 + 1)$ est bien défini pour tout x . Ainsi, la dérivée est donnée par :

$$f'(x) = (x^2 + 1)^{\sin(x)} \left(\cos(x) \log(x^2 + 1) + \sin(x) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$$

puisque $\log(x^2 + 1)^{\sin(x)} = \sin(x) \log(x^2 + 1)$.

9.2 Fonctions hyperboliques

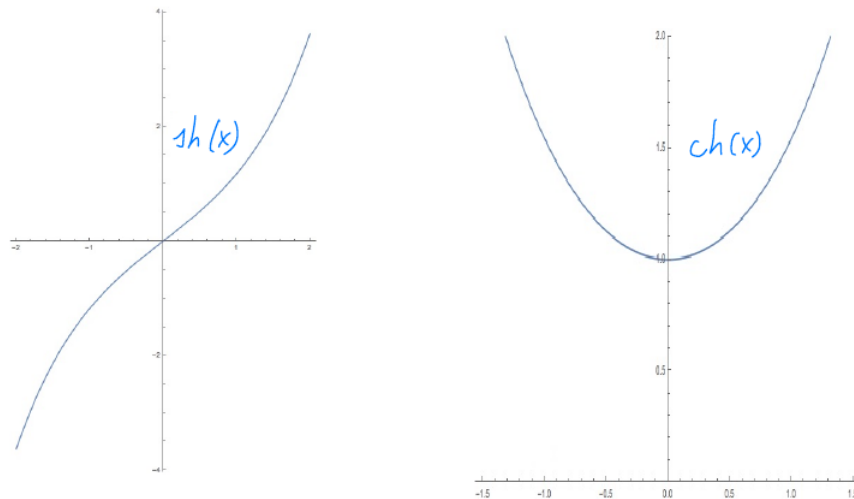
Définition

On définit le sinus hyperbolique :

$$\text{sh}(x) = \sinh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction impaire, définie pour $\forall x \in \mathbb{R}$. On peut aussi définir le cosinus hyperbolique :

$$\text{ch}(x) = \cosh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

*Rappel*

On avait trouvé que :

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Note personnelle

Si on prend les formules ci-dessus comme définition du sinus et du cosinus complexe, alors on trouve :

$$\sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} \cdot (-i) = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sinh(x)$$

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$$

De plus, on remarque qu'on peut séparer n'importe quelle fonction comme la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire, de manière unique. $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ sont ces fonctions pour $\exp(x)$:

$$\exp(x) = \cosh(x) + \sinh(x)$$

Et :

$$\sinh(-x) = -\sinh(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

Finalement, $\langle \cosh(t), \sinh(t) \rangle$ est la paramétrisation de la branche positive de l'hyperbole ($y^2 = x^2 - 1$), là où $\langle \cos(t), \sin(t) \rangle$ est la paramétrisation du cercle ($y^2 = 1 - x^2$).**Dérivée**

On remarque que leurs dérivées sont symétriques :

$$(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

On remarque que, contrairement au sinus et au cosinus classiques, il n'y a pas de moins. La dérivée du sinus et du cosinus sont "périodiques" toutes les 4 dérivées, celles des sinus et cosinus hyperboliques sont "périodiques" toutes les 2 dérivées.

Propriété

On remarque que ces fonctions ont la propriété suivante :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Tangente et co-tangente hyperbolique

On définit :

$$\text{th}(x) = \tanh(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On remarque que $-1 < \tanh(x) < 1$ pour tout x . De plus, on définit :

$$\coth \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Fonctions réciproques

On parle de “l’argument du sinus hyperbolique”, donc on note la fonction inverse $\operatorname{argsh} = \operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On a :

$$y = \sinh(x) \iff x = \operatorname{arcsinh}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

On peut calculer la dérivée de cette fonction :

$$(\operatorname{arcsinh}(y))' = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))}$$

On a $\cosh(x) = \pm \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$. Mais, puisque $\cosh(x) > 0$ pour tout x on prend la version positive. Donc :

$$(\operatorname{arcsinh}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arcsinh}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

On peut aussi trouver des fonctions réciproques pour les autres fonctions hyperboliques.

9.3 Dérivées multiples

Définition

On définit la **dérivée d’ordre 2** comme :

$$f''(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f'(x))'$$

De la même manière, on définit la **dérivée d’ordre n** par :

$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(f^{(n-1)}(x) \right)'$$

Il est important de faire la différence avec les puissances. Pour des dérivées d’ordre n , on met des parenthèses, pas pour les puissances.

Exemple

Soit $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f'(x) = nx^{n-1}$. En calculant la dérivée seconde, on a $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. On peut continuer ainsi de suite jusqu’à $f^{(n)} = n!$. Ensuite, on trouve que $f^{(n+1)} = 0$.

On peut démontrer ceci par récurrence.

Définition

$f : E \mapsto F$ est **n fois dérivable** si elle admet une dérivée d’ordre n .

Définition de classe

$f : E \mapsto F$ est **de classe $C^n(E)$** si elle admet une dérivée d’ordre n qui est continue sur E . On dit qu’elle est “ n fois continûment dérivable”.

Exemple

$f(x) = \sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On dit donc que $\sin(x)$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Les polynômes appartiennent aussi à $C^\infty(\mathbb{R})$ (on peut utiliser le symbole $\in$).

9.4 Théorème des accroissement finis

Proposition

Si $f : E \mapsto F$ est une fonction dérivable en $x_0 \in E$ telle que f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve

Soit $f(x_0)$ un maximum local de $f(x)$. Alors, $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout x dans un voisinage de x_0 .

Puisque la fonction est dérivable en x_0 , les dérivées sur le côté sont égales :

$$f'_d(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leq 0$$

$$f'_g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0$$

Ainsi, puisque $f'_d(x) = f'_g(x)$, elles sont forcément égales à 0.

La preuve est similaire si $f(x_0)$ est un minimum local de $f(x)$.

Réciproque

La réciproque est fautive. En effet, prenons par exemple $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$. On a bien que

$$f'(0) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

Cependant, $f(x)$ n'a pas d'extremum local en $x = 0$.

Définition des points stationnaires

Si $f : E \mapsto F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un **point stationnaire** de f .

Observation

On remarque que les points d'extrema d'une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sont parmi les suivants :

1. Les points stationnaires : $f'(x_0) = 0$.
2. Les points $x \in]a, b[$ où $f'(x)$ n'existe pas.
3. Les bornes $x = a$ et $x = b$.

Théorème de Rolle

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \mapsto F$ telle que :

1. $f : [a, b] \mapsto F$ est continue
2. f est dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

Si $f : [a, b] \mapsto F$ est constante, on a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \quad \forall x_0 \in]a, b[$$

Si $f : [a, b] \mapsto F$ n'est pas constante, on sait qu'il existe $z_1 \neq z_2 \in [a, b]$ où :

$$f(z_1) = \min_{[a,b]} f(x), \quad f(z_2) = \max_{[a,b]} f(x), \quad f(z_1) \neq f(z_2)$$

En effet, si $f(z_1) = f(z_2)$, la fonction serait constante (c'est la seule possibilité pour que le maximum soit égal au minimum).

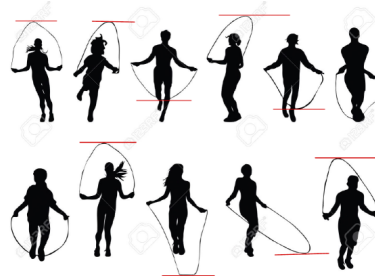
Cependant, puisque $f(a) = f(b)$, on sait qu'au moins un entre z_1 et z_2 est dans $]a, b[$. Prenons sans perte de généralité (SPDG) que $z_1 \in]a, b[$. On sait que $f'(z_1) = 0$ puisque z_1 est un extremum local et f est dérivable sur $]a, b[$. Ainsi, en posant $c = z_1$, on a trouvé :

$$f'(c) = 0$$

□

*Application
physique*

Il existe toujours une tangente horizontale pour une corde suspendue entre deux points de même hauteur.



— Lundi 29 novembre 2021 — Cours 19 : Le théorème préféré des élèves selon la prof

Remarque

Si $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \alpha$$

où $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Elle est clairement continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. De plus, on peut voir que, si $x \neq 0$, sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

De plus, calculons la dérivée en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos(x)}_{\text{borné}} = 0$$

Finalement, on remarque que $f(x)$ est paire, donc que $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{-1}{2})$. Ainsi, par le théorème de Rolle, on sait que $\exists c \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ tel que $f'(c) = 0$.

On a trouvé que $c = 0$ fonctionnait, mais on en cherche d'autres. Résolvons l'équation suivante :

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \xrightarrow{y = \frac{1}{x}} \frac{2}{y} \cos(y) + \sin(y) = 0 \xrightarrow{\cos(y) \neq 0} \tan(y) = \frac{-2}{y}$$

Puisqu'on cherche $x \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, on en déduit que $y \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Puisque $\tan(y)$ est périodique, on déduit qu'il y a un nombre infini de tel c .

Remarque

$f(x)$ est un exemple d'une fonction dérivable sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$, mais pas de class $C^1(] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [)$.

En effet, on avait trouvé que la dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Cependant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{2x \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{borné}}} + \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'existe pas}} \right)$$

Ainsi, la limite n'existe pas, donc $f'(x)$ n'est pas continue en $x = 0$. On en déduit donc bien que f n'est pas de classe $C^1(] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [)$.

Théorème des accroissements finis (TAF)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$

Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque

On voit que si $f(a) = f(b)$, alors on retrouve le théorème de Rolle.

Preuve

Prenons g , la droite qui passe par $\langle a, f(a) \rangle$ et $\langle b, f(b) \rangle$. La pente de cette droite est donnée par :

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

L'équation de cette droite est donné par :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Prenons maintenant la fonction suivante :

$$h(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

On remarque que $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$ (puisque $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$ par construction). De plus, on voit que $h(x)$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Ainsi, le théorème de Rolle s'applique, donc on sait qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Donc :

$$0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Corollaire 1

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Alors, cette fonction est constante sur $[a, b]$.

Preuve

Supposons par l'absurde qu'il existe $c_1 \neq c_2 \in [a, b]$ tels que $f(c_1) \neq f(c_2)$. Donc, par le TAF, il existe $d \in]c_1, c_2[$ tel que :

$$f'(d) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} \neq 0$$

Ceci est une contradiction puisqu'on avait dit que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

□

Corollaire 2

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors :

$$f(x) = g(x) + \alpha, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Note personnelle

Commençons par notre hypothèse :

$$f'(x) = g'(x) \implies f'(x) - g'(x) = 0 \implies (f(x) - g(x))' = 0$$

Ainsi, par le corollaire 1, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) - g(x) = \alpha \implies f(x) = g(x) + \alpha$$

Corollaire 3

$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ si et seulement si f est croissante sur $]a, b[$.

De la même manière, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ si et seulement si f est décroissante sur $]a, b[$.

Même, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $]a, b[$.

De manière similaire, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante sur $]a, b[$.

Remarque

Si f est strictement croissante, cela n'implique pas que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ (on sait uniquement que $f'(x) \geq 0$).

Par exemple : on peut prendre $f(x) = x^3$. f est strictement croissante sur $[-1, 1]$, mais $f'(0) = 0$.

Preuve de $\implies$

Supposons que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement croissante sur cet intervalle, donc que $\exists x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Cependant, par le TAF, on sait qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0}} \leq 0$$

Ce qui est une contradiction, puisque $f'(x) > 0$ pour tout x .

La preuve est similaire pour les fonctions croissantes, décroissantes et strictement décroissantes.

□

Preuve de $\impliedby$

Supposons que $f(x)$ est croissante. On remarque que :

$$x > c \implies f(x) \geq f(c)$$

$$x < c \implies f(x) \leq f(c)$$

Ainsi, dans les deux cas :

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \implies f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Le preuve est similaire si f est décroissante.

□

Exemple (courant en examen)

Disons que nous voulons démontrer que l'équation $x + \log(x) = 0$ a exactement une solution réelle.

Prenons $f(x) = x + \log(x)$. On remarque que c'est une fonction continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, on observe que :

$$f(1) = 1 + \log(1) = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \log\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \log(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

Ainsi, on en déduit par le TVI qu'il existe *au moins* une solution $c \in]\frac{1}{e}, 1[$.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe au moins deux solutions. Ainsi, $\exists a < b \in]0, +\infty[$ tels que $f(a) = f(b) = 0$. On en déduit par le théorème de Rolle qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f'(d) = 0$. Mais, calculons cette dérivée :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Ce qui est une contradiction avec l'existence d'un d tel que $f'(d) = 0$. Ainsi, on en déduit qu'il existe *au plus* une solution de $f(x) = 0$.

Des deux affirmations, on peut en déduire qu'il existe *exactement* une solution à l'équation $x + \log(x) = 0$.

Remarque

Si nous voulions démontrer qu'il y avait exactement 5 solutions, il aurait fallu séparer l'intervalle en 5 sous-intervalles.

TAF généralisé

Soient $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

1. f, g sont continues sur $[a, b]$
2. f, g sont dérivables sur $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Remarque

On retrouve le théorème des accroissements finis en prenant $g(x) = x$.

9.5 Règle de Bernoulli-L'Hospital

Théorème

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, et $f, g :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que :

1. $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ ou 0 (l'un des 3, pas les 3)
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Alors, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Preuve

On considère le cas où

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

On peut prolonger par continuité f et g en a .

De plus, par le TAF généralisé appliqué sur $[a, x]$, $\forall x \in]a, b[$, on sait que $\exists c(x)$ tel que $a < c(x) < x$ et :

$$\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

puisque l'on a prolongé par continuité f et g en a .

Par le théorème des deux gendarmes, on remarque que $\lim_{x \rightarrow a^+} c(x) = a^+$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu$$

où μ est un nombre réel ou $\pm\infty$ et existe par hypothèse.

Remarque 1

On peut remplacer $\lim_{x \rightarrow a^+}$ par $\lim_{x \rightarrow b^-}$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

Remarque 2

La non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'implique pas la non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple

Calculons la limite suivante sans notre théorème ci-dessus :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{\sin(x)}{x}}^{\rightarrow 0}}{1 + \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 0}} = 1$$

Cependant, si on essayait d'appliquer ce théorème, on aurait trouvé une limite qui n'existe pas :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

En effet, prenons les suites $a_k = 2k\pi$ et $b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ainsi, on trouve :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2k\pi)}{1 + \cos(2k\pi)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

On n'aurait pas non pu appliquer ce théorème sur la deuxième limite, la première hypothèse n'est pas tenue : $1 + \cos(x)$ est nul pour une infinité de points.

Règle de Bernoulli-L'Hospital

Soient $f, g : \{x \in I, x_0 \neq x\} \mapsto \mathbb{R}$ (dans les notations de la professeure, I est un intervalle ouvert) telles que :

1. f, g sont dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$
2. $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Exemple 1

Soit $\alpha > 0$. Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \stackrel{\alpha \geq 0}{=} 0, \quad \forall \alpha > 0$$

On a donc obtenu que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Exemple 2

Prenons la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Ainsi, on a trouvé que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 3

Soit la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$$

C'est une forme indéterminée 1^∞ . Prenons la définition de l'exponentielle en base a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \log(\cos(2x))}$$

Puisque e^x est continue, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \log(\cos(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3 \log(\cos(2x))}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

On remarque que $g(x) = x^2 \neq 0$ au voisinage de $x = 0$ et $g'(x) = 2x \neq 0$ au voisinage de $x = 0$. Ainsi, BL est applicable si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{\cos(2x)} (-\sin(2x)) \cdot 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(2x)}}_{\rightarrow 1} \cdot 2(-3) = -6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ainsi, puisque e^x est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \log(\cos(2x))} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Il est assez incroyable d'obtenir un résultat aussi simple après autant de calculs et de théorie! ☺

9.6 Développements limités

Théorème (formule de Taylor)

Soit $f : I \mapsto F$ une fonction $(n + 1)$ fois dérivables sur I , avec $a \in I$. Alors, $\forall x \in I$, il existe u entre a et x (on n'utilise pas de notation avec des intervalles puisqu'on sait pas si a est à gauche ou à droite) tel que :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(f): \text{ Polynôme de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(f): \text{ Reste}}$$

Le tout est la formule de Taylor.

Idée de preuve Soit f dérivable sur I . Par le TAF, $\forall x, a \in A$, il existe u entre x et a tel que :

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ \iff f(x) - f(a) &= f'(u)(x - a) \\ \iff f(x) &= f(a) + \frac{f'(u)}{1}(x - a) \end{aligned}$$

Qui est la formule de Taylor d'ordre 0.

Terminologie La formule de Taylor s'appelle la formule de Maclaurin si $a = 0$.

Note personnelle Comme d'habitude, il y a une très bonne vidéo de 3Blue1Brown sur le sujet :

<https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsJIBzJ4>

L'idée principale est que, si nous connaissons très bien une fonction à un point (c'est-à-dire qu'on connaît sa valeur, la valeur de sa dérivée, etc.), alors on peut approximer l'alentour de ce point avec un polynôme. On étudiera les rayons de convergence plus tard, mais certaines fonctions, comme e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$ et les polynômes sont égaux à leur série de Taylor (qu'on définiera aussi plus tard, mais qui est similaire aux polynômes de Taylor) pour tout x sur leur domaine.

Exemple 1

Prenons la fonction $f(x) = \sin(x)$, qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons sa formule de Taylor en $a = 0$:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x), \quad \dots$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad \dots$$

Ainsi, on obtient :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

On peut l'écrire sous la forme de la série suivante :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

Exemple 2

Calculons la formule de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ autour de $a = 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

Définition (développement limité)

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction définie au voisinage de $x = a$.

S'il existe des nombres $a_0, \dots, a_n$ et une fonction $\varepsilon(x)$, tels que $\forall x \in E, x \neq a$, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

on dit que f admet un **développement limité (DL)** d'ordre n autour de $x = a$.

On appelle les n premiers termes (donc la partie sous forme de polynôme) **la partie principale du développement limité**, $P_n(x)$. On appelle le $n+1$ -ème terme **le reste du DL**, $R_n(x) = (x-a)^n \varepsilon(x)$.

Proposition (unicité)

Si $f : E \mapsto F$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x = a$, alors celui-ci est unique.

Preuve

Supposons par l'absurde que ce développement n'est pas unique :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)^2 + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a)^2 + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

Avec :

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x)$$

Puisque les deux développements ne sont pas uniques, il existe k tel que $a_k \neq b_k$; prenons le plus petit. Prenons la différence de nos deux expressions (ce qui donne 0 puisqu'elles sont égales), puis divisions le résultat par $(x-a)^k$ (on sait que $x \neq a$, donc on a le droit) :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x) - f(x)}{(x-a)^k} \\ &= (a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \dots \\ &\quad + (x-a)^{n-k}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \end{aligned}$$

Or, on remarque que tous les termes de l'expression sur les deux dernières lignes tendent vers 0 quand $x \rightarrow a$. Ainsi, pour que les deux résultats soient égaux, il faut nécessairement que $a_k - b_k = 0$, et donc que $a_k = b_k$, ce qui est une contradiction.

□

Corollaire

Soit $a \in I$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ continûment dérivable sur I . Alors, la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de la fonction f autour de $x = a$.

Preuve

On doit démontrer que le reste de Taylor, $R_n(x) = f^{(n+1)}(u) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ fonctionne comme reste du développement limité. En d'autres mots, il faut vérifier que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n+1)}(u) \frac{x-a}{(n+1)!} \stackrel{?}{=} 0$$

Calculons donc la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| f^{(n+1)}(u) \frac{x-a}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a} M \frac{x-a}{(n+1)!} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

En effet, par hypothèse on sait que $f^{(n+1)}(x)$ est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a]$, donc elle est bornée. Il existe donc bien un M tel que $|f^{(n+1)}(u)| \leq M$ pour tout u sur cet intervalle.

Remarque 1 Il suffit d'avoir f n fois continûment dérivable sur I pour avoir

$$f(x) = P_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Dans ce cas on ne peut pas définir $\varepsilon(x)$ comme la $n+1$ dérivée, mais on peut aussi trouver une expression (plus compliquée).

Remarque 2 $f : E \mapsto F$ peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable.

Cependant, dans notre cours ce genre de cas sont rares.

Résumé

Soit $f : I \mapsto F$ n fois continûment dérivable sur I , $a, x \in I$, $x \neq a$. Alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur I , alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Ainsi, si $f : E \mapsto F$ est n fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x = a$, alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de f autour de $x = a$.

Exemple

Trouvons le développement limité d'ordre n de la fonction suivante autour de $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Quand on étudiait les séries géométriques, on avait trouvé que :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

Cependant, nous voulons trouver le développement limité d'ordre n ; écrivons donc notre résultat sous la forme :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R, \quad R = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots$$

où R est le reste. Simplifions celui-ci :

$$R = x^{n+1}(1 + x + x^2 + \dots) = x^{n+1} \frac{1}{1-x} = x^n \varepsilon(x)$$

Nous devons vérifier que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Comme voulu. On peut donc en déduire que le résultat suivant est le développement limité de f autour de $x = 0$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1-x}$$

Exercice au lecteur : trouver ce résultat avec la formule de Taylor.

Note personnelle Comme précisé ci-dessus, nous pouvons utiliser ces polynômes de manière à approximer notre fonction autour d'un point très bien connu. Voici un exemple tiré du cours de Méthode Mathématique pour Physicien I donné par Professeure Camille Bonvin au semestre d'automne 2019 à l'Université de Genève.

Approximons $\cos(0.1)$ à l'aide d'une expansion de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_3(x) \implies \cos(0.1) = 1 - \frac{0.1^2}{2!} + R_3(x) = 0.995 + R_3(x)$$

De plus, regardons l'erreur :

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(u)}{4!}x^4 = \frac{\cos(u)}{4!}x^4$$

Puisqu'on sait que $u \in [a, x] = [0, 0.1]$, on peut approximer l'erreur. En effet, on voit que celle-ci est maximale quand $u = 0$, donc on a une borne supérieure :

$$|R_3(x)| < \frac{\cos(0)}{4!}x^4 = \frac{x^4}{4!} \implies |R_3(0.1)| < \frac{0.1^4}{4!} = 4.1\bar{6} \cdot 10^{-6}$$

Notre estimation, $\cos(0.1) \approx 0.995$, est donc déjà très bonne !

9.7 Étude de fonctions

Rappel

Si $f : I \mapsto F$ est dérivable sur I et admet un extremum local en $x = c$, alors $f'(c) = 0$.

Proposition (condition suffisante pour un extremum local)

Soit $f : I \mapsto F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}^*$ est pair. Si cette fonction est telle que

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad \text{mais} \quad f^{(n)}(c) \neq 0$$

Alors, si $f^{(n)}(c) > 0$, f admet un minimum local en $x = c$, et si $f^{(n)}(c) < 0$, alors f admet un maximum local en $x = c$.

Mnémotechnie

On peut utiliser la fonction x^2 pour se souvenir de ce théorème. On voit que $f(x) = x^2$ a un minimum en $x = 0$, et $f''(x) = 2 > 0$, alors que $g(x) = -x^2$ a un maximum et $g''(x) = -2 < 0$.

Preuve

La formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x = c$ nous donne :

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(u)(x-c)^n}{n!}$$

En effet, les dérivées sont nulles, il ne nous reste plus que le reste et la constante.

Supposons que $f^{(n)}(c) > 0$. Alors :

$$f(x) - f(c) = \underbrace{f^{(n)}(u)}_{\geq 0} \underbrace{\frac{(x-c)^n}{n!}}_{> 0}$$

Le premier terme est positif puisque $f^{(n)}(c) > 0$, $f^{(n)}(x)$ est continue sur I et u est proche de c . Le deuxième terme est strictement positif car n est pair (cette hypothèse est importante).

Ainsi, nous avons obtenu que :

$$f(x) - f(c) \geq 0 \iff f(x) \geq f(c)$$

pour tout x au voisinage suffisamment petit de c . On en déduit donc que $f(c)$ est un minimum local.

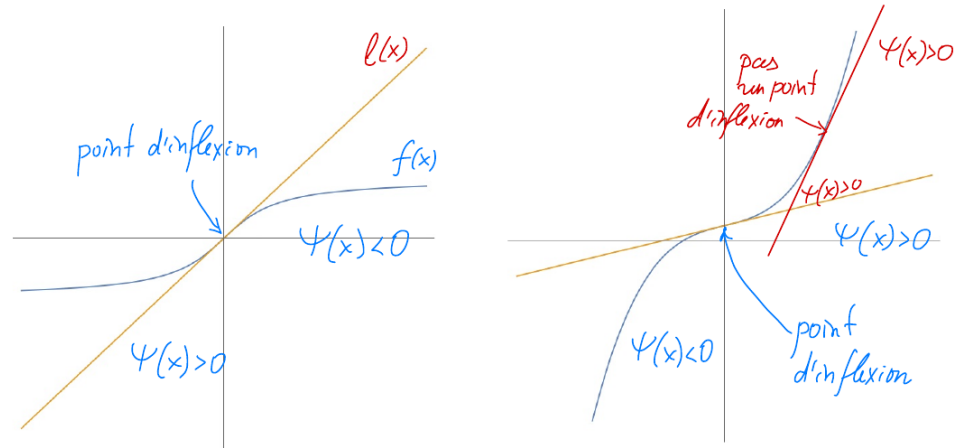
La preuve pour le maximum local est similaire.

□

Définition (tangente)Soit $f : E \mapsto F$ une fonction dérivable en $a \in E$. $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est la **tangente** à la courbe $y = f(x)$ en $\langle a, f(a) \rangle$.**Définition (point d'inflexion)**

Prenons la fonction suivante :

$$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - \ell(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

Si $\psi(x)$ change de signe en $x = a$, alors $\langle a, f(a) \rangle$ est un **point d'inflexion** de f .**Proposition**Soit $f : I \mapsto F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}$ est **impair et $n > 1$** .

Si la fonction est telle que :

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{mais} \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Alors, le point $\langle a, f(a) \rangle$ est un point d'inflexion de f .*Preuve*Prenons la fonction de Taylor d'ordre $(n - 1)$ autour de $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f^{(n)}(u) \frac{(x - a)^n}{n!}$$

En effet, toutes les dérivées sont nulles à partir de la dérivée seconde. Calculons $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= f(x) - \ell(x) \\ &= f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + f^{(n)}(u) \frac{(x - a)^n}{n!} - f(a) - f'(a)(x - a) \\ &= f^{(n)}(u) \underbrace{\frac{(x - a)^n}{n!}}_{\text{change de signe}} \end{aligned}$$

Le premier terme reste positif ou reste négatif, puisque, de la même manière que dans la preuve pour les extremums, u est dans un voisinage arbitrairement petit de a , donc par continuité $f(u)$ est de même signe que $f(a)$. Le deuxième terme change de signe en $x = a$ car n est impair.

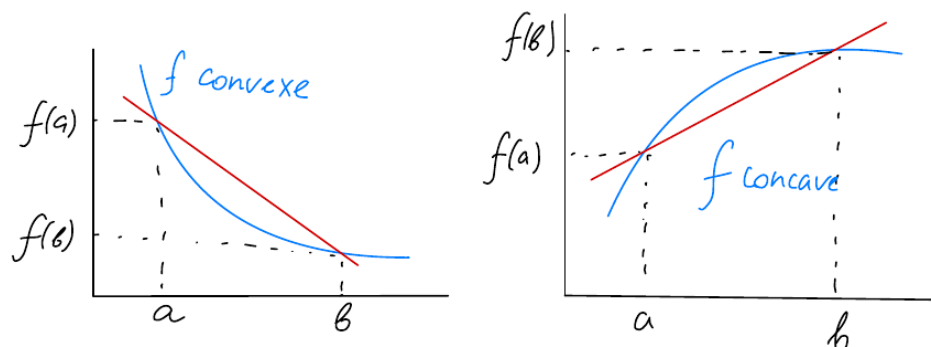
Ainsi, $\psi(x)$ change de signe en $x = a$, ce qui implique que $\langle a, f(a) \rangle$ est un point d'inflexion.

□

Définition
(convexité et concavité)

$f : I \mapsto F$ est **convexe** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au dessous de la droite passant par $\langle a, f(a) \rangle$ et $\langle b, f(b) \rangle$.

De manière similaire, $f : I \mapsto F$ est **concave** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve **au dessus** de la droite passant par $\langle a, f(a) \rangle$ et $\langle b, f(b) \rangle$.



| *Mnémotechnie* $f(x) = -x^2$ est concave et elle “descend à la cave”.

| *Note personnelle* Je trouve personnellement infiniment plus clair de dire que la fonction “sourit” quand elle est convexe, et qu’“elle est triste” quand elle est concave.

Proposition

Soit $f : I \mapsto F$ deux fois dérivable sur I .

f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ sur I (ce qui est équivalent à dire que $f'(x)$ est croissante sur I).

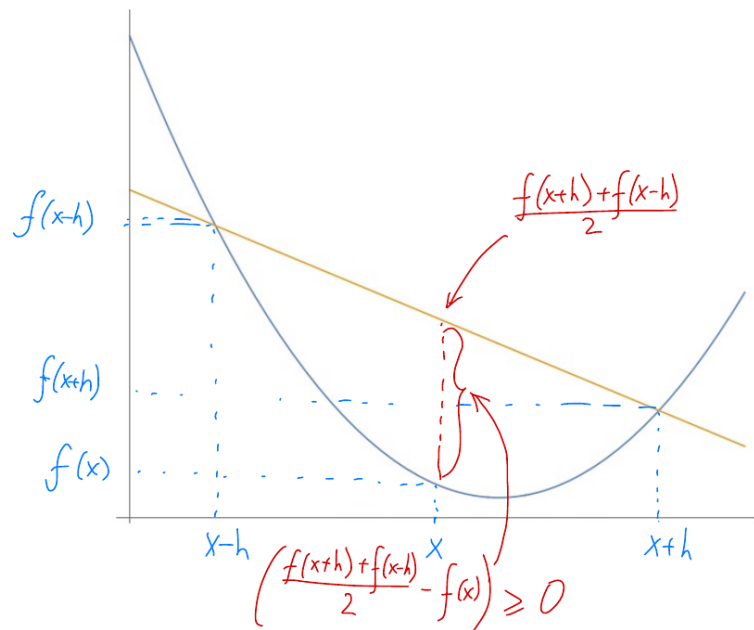
f est **concave** sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ sur I (ce qui est équivalent à dire que $f'(x)$ est **décroissante** sur I).

| *Idée de preuve* La dérivée seconde est donnée par :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$

Ce n'est pas très formel et pas très juste car ce ne serait pas nécessairement le même h partout. Cependant, cela donne un peu d'intuition. Ainsi, on peut simplifier comme :

$$f''(x) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} - f(x) \right)}{h^2}$$



Graphiquement, on voit que le numérateur de la fonction est positif si la fonction se trouve au dessous de la corde, c'est à dire qu'elle est convexe. Ainsi, la fraction entière est positive puisque $h^2 > 0$.

On trouve donc bien

$$f''(x) \geq 0 \iff f(x) \text{ est convexe sur } I$$

L'idée est similaire pour une fonction concave.

_____ Lundi 6 décembre 2021 — Cours 21 : Propriétés des DL, et rayons de convergence

9.8 Retour aux développements limités

Proposition :
opérations algébriques sur les DL

Soient $f, g : E \mapsto \mathbb{R}$ deux fonction admettant un DL autour de $x = a$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = P_f^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x) = P_g^n(x) + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(x) = 0$$

Alors :

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$ et :

$$P_{\alpha f + \beta g}^n(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$$

2. $f(x)g(x)$ admet aussi un DL d'ordre n :

$$P_{f \cdot g}^n(x) = P_f^n(x) P_g^n(x)$$

où on ne conserve que les termes d'ordre $\leq n$.

3. Si $b_0 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, alors :

$$P_{\frac{f}{g}}^n(x) = \frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)}$$

Exemple

Trouvons le DL d'ordre 4 autour de $x = 0$ de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Méthode 1

Utilisons les fractions partielles et la première propriété :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{2} (1+x+x^2+x^4+x^4\varepsilon_1(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1-x+x^2-x^3+x^4+x^4\varepsilon_2(x)) \\ &= 1+x^2+x^4+\varepsilon(x)x^4 \end{aligned}$$

Méthode 2

Nous aurions aussi pu utiliser la deuxième propriété :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \\ &= (1+x+x^2+x^3+x^4+\varepsilon_1(x)x^4) \\ &\quad \cdot (1-x+x^2-x^3+x^4+\varepsilon_2(x)x^4) \\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4+(-x-x^2-x^3-x^4) \\ &\quad + (x^2+x^3+x^4)+(-x^3-x^4)+x^4+\varepsilon(x)x^4 \\ &= 1+x^2+x^4+\varepsilon(x)x^4 \end{aligned}$$

Méthode 3

Nous aurions pu utiliser la troisième proposition. En effet, faisons une division en colonne :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x^2 \\ \hline 1-x^2 & 1+x^2+x^4+\dots \\ \hline x^2 & \\ \hline x^2-x^4 & \\ \hline x^4 & \\ \hline x^4-x^6 & \\ \hline x^6 & \\ \hline \vdots & \end{array}$$

Ainsi, en prenant les termes de degré ≤ 4 , on a bien :

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\varepsilon(x)x^4$$

Méthode 4

Quatrièmement, nous aurions pu utiliser une autre méthode, dite des coefficients indéterminés. On cherche des coefficients tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De là, on en déduit que :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)(1-x^2) = 1 \text{ jusqu'à l'ordre 4}$$

En développant, on trouve le système suivant :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 - a_0 = 0, \quad a_3 - a_1 = 0, \quad a_4 - a_2 = 0$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1$$

On a donc bien obtenu :

$$f(x) = 1+x^2+x^4+\varepsilon(x)x^4$$

Proposition : DL d'une fonction composée Soient f et g , deux fonctions, où f admet un DL autour de $x = a$, et g autour de $y = 0$:

$$f(x) = a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$$

$$g(y) = g(0) + b_1 y + \dots + b_n y^n + y^n \varepsilon_2(y)$$

Alors, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x = a$, donné par :

$$P_{g \circ f}^n(x) = g(0) + b_1(P_f^n(x-a)) + b_2(P_f^n(x-a))^2 + \dots + b_n(P_f^n(x-a))^n$$

où on ne conserve que les termes d'ordre $\leq n$.

Exemple

Reprenons notre exemple ci-dessus, calculons le DL de la fonction suivante autour de $x = 0$:

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Prenons $g(y) = \frac{1}{1-y}$ et $f(x) = x^2$. On voit que f est son propre développement limité autour de $x = 0$, donc :

$$g(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \varepsilon_1(y)y^4, \quad f(x) = x^2$$

Ainsi, on peut remplacer $y = x^2$:

$$h(x) = 1 + (x^2) + (x^2)^2 + \varepsilon(x)x^4 = 1 + x^2 + x^4 + \varepsilon(x)x^4$$

9.9 Développements limités pour le calcul des limites

Exemple

Disons que nous voulons calculer la limite suivante (qui est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{(e^x - 1 - x)^2}$$

On se souvient que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

De plus, on connaît déjà le développement limité de e^x , par sa définition :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Commençons par le dénominateur :

$$(e^x - 1 - x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 = \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \varepsilon_1(x)x^4 = \frac{x^4}{4} + \varepsilon_1(x)x^4$$

On prend le premier terme qui n'est pas 0. Nous aurons peut-être besoin d'aller plus loin, mais pas nécessairement.

De plus :

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)^2 = x^2 - 2 \frac{x^4}{3!} + \varepsilon_2(x)x^4 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4$$

On prend un développement limité du même ordre que le dénominateur.

Ainsi, on obtient par les opérations algébriques sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{(e^x - 1 - x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 - x^2}{\frac{x^4}{4} + \varepsilon_1(x)x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4}{\frac{x^4}{4} + \varepsilon_1(x)x^4}$$

Ainsi, en simplifiant les x^4 , on obtient que c'est égal à :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{3} + \varepsilon_2(x)}{\frac{1}{4} + \varepsilon_1(x)} = \frac{-4}{3}$$

Note 1

Si on n'avait pas calculé assez de terme pour un développement limité, on se serait retrouvé avec une forme indéterminée de la forme $\frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)}$. Si on avait calculé trop de termes, alors ils tendraient juste vers 0, donc ce ne serait pas un problème.

Dans les deux cas, cela nous force à faire trop de calculs, mais ce n'est pas "grave", on n'obtient pas la mauvaise valeur à la fin.

Note 2

Cette méthode est plus puissante que Bernoulli-L'Hospital. Si BL fonctionne, alors cette méthode fonctionne. Notez que, si on utilise BL pour cet exemple, il faudra dériver quatre fois.

Exercice au lecteur

Calculez la limite suivante à l'aide des développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x^3}$$

Chapitre 10

Séries entières

10.1 Rayon de convergence

Définition On appelle **série entière** les expressions sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Le **domaine de convergence** est défini par :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0^k) \text{ converge} \right\}$$

La fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ avec $x \in D$ est définie par la série entière.

Exemple 1 Par la définition de l'exponentielle :

$$e^x \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

On peut (re-)trouver son domaine de convergence. Utilisons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, cette série entière converge pour tout x dans $\mathbb{R}$, donc $D = \mathbb{R}$.

Exemple 2 Prenons la série entière suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad a > 0$$

À nouveau, on peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{a^{k+1} (x - x_0)^{k+1}}{a^k (x - x_0)^k} \right| = a |x - x_0|$$

Donc, si $|x - x_0| < \frac{1}{a}$, alors la série converge absolument. Si $|x - x_0| > \frac{1}{a}$, alors elle diverge grossièrement. On doit encore considérer les cas où $|x - x_0| = \frac{1}{a}$.

Si $x = x_0 + \frac{1}{a}$, alors on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1, \text{ qui diverge}$$

Si $x = x_0 - \frac{1}{a}$, alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(\frac{-1}{a} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k, \text{ qui diverge}$$

On peut donc en déduire que :

$$D = \left] x_0 - \frac{1}{a}, x_0 + \frac{1}{a} \right[$$

Théorème : rayon de convergence

Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Il existe r , son **rayon de convergence**, où $0 \leq r \leq +\infty$, tel que :

1. La série converge absolument pour tout x tels que $|x - x_0| < r$.
2. La série diverge pour tout x tels que $|x - x_0| > r$

Remarque 1 La convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être étudié séparément.

Remarque 2 On voit donc que D est un intervalle qui contient x_0 , et centré en x_0 .

Remarque 3 Si $r \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$, alors D est un des 4 intervalles suivants :

$$]x_0 - r[, \quad [x_0 - r[, \quad]x_0 + r[, \quad [x_0 + r[$$

Si $r = 0$, alors $D = \{x_0\}$. Par exemple, la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ ne converge que si $x = 0$, donc $D = \{0\}$.

Si $r = +\infty$, alors $D = \mathbb{R}$. Par exemple, la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ converge pour tout x , donc $r = +\infty$ et $D = \mathbb{R}$.

Proposition

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

1. Supposons que $a_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$, où $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.
On a donc :

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

2. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

Preuve du point 1

Utilisons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k(x - x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|x - x_0|}_{\text{constant}} \underbrace{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\rightarrow \ell} = |x - x_0| \ell$$

Donc, la série converge absolument si $|x - x_0| \ell < 1$, ce qui est équivalent à :

$$|x - x_0| < \frac{1}{\ell} = r$$

De la même manière, la série diverge grossièrement si $|x - x_0| \ell > 1$, ce qui est équivalent à :

$$|x - x_0| > \frac{1}{\ell} = r$$

Exemple

Soit la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n2^n}$$

Utilisons la première partie de la proposition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n2^n} \frac{(n+1)2^{n+1}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

Notre rayon de convergence est donc $r = 2$, on en déduit que $] -2, 2[\subset D$. Nous devons encore étudier $x = \pm 2$. Commençons par $x = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qui diverge puisque c'est la série harmonique. Donc, $2 \notin D$.

Étudions maintenant $x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

qui est la série harmonique alternée et qui converge par le critère de Leibniz. Donc, $2 \in D$.

Ainsi, on en déduit que notre domaine de convergence est $D = [-2, 2[$, avec un rayon de convergence $r = 2$.

— Mercredi 8 décembre 2021 — **Cours 22 : Séries de Taylor et primitives de séries entières**

Exemple

Soit la série entière suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} (x-1)^k \implies a_k = \frac{2^k}{(k+1)2^{k+2}}$$

Nous cherchons le rayon de convergence et le domaine de convergence.

On peut passer par l'inverse du critère de d'Alembert pour obtenir le rayon directement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \cdot \frac{(k+2)2^{k+3}}{3^{k+1}} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \frac{2}{3} = r$$

On en déduit que $]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[\subset D$, puisque $x_0 = 1$. Nous devons encore étudier les bornes.

On remarque que, quand $x = \frac{5}{3}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k 2^k}{(k+1)2^{k+2} 3^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

qui est la série harmonique, donc elle diverge.

De plus, étudions $x = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)2^{k+2}} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

qui est la série harmonique alternée, et qui converge par le critère de Leibniz.

On en déduit donc que :

$$r = \frac{2}{3}, \quad D = \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right[$$

10.2 Série de Taylor

Définition

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ (où I est un intervalle ouvert, comme d'habitude) une fonction de classe $C^\infty(I)$ (elle est indéfiniment dérivable sur cet intervalle), et $x_0 \in I$.

Alors, la **série de Taylor** au point x_0 est :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Terminologie

Si $x_0 = 0$, alors cette série est appelée la **série de Maclaurin** :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Note

Nous avons déjà étudié la formule de Taylor, et le polynôme de Taylor. Voici la série de Taylor !

Note personnelle

Je me permets de remettre ici le lien de la vidéo de 3Blue1Brown qui parle des séries de Taylor :

<https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsJIBzJ4>

Convergence

Nous avons déjà des méthodes qui nous permettent de trouver le rayon et le domaine de convergence des séries de Taylor (puisque ce sont des séries entières). Cependant, nous voulons maintenant aussi trouver l'ensemble $E \subset D$ dans lequel la série converge vers sa fonction, i.e :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in E$$

On se souvient que la formule de Taylor nous donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

où u est entre x et x_0 .

Ainsi, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ converge vers $f(x)$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)(x) = 0$$

Exemple 1

Par la définition de l'exponentielle :

$$e^x \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Comme on l'a déjà démontré plusieurs fois, cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, par le critère de d'Alembert. De plus, puisque cette série est la définition de l'exponentielle, alors clairement la série donne toujours la même valeur que l'exponentielle. Ainsi :

$$D = E = \mathbb{R}$$

Exemple 2

Soit la fonction de classe $C^\infty(]0, +\infty[)$ suivante :

$$f(x) = \log(x)$$

Série de Taylor

On peut démontrer par récurrence que :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{x^k}$$

En prenant $x_0 = 1$, on remarque donc que :

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

Ainsi, on peut calculer la série de Taylor de $\log(x)$ en $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Taylor}(\log(x))_{x=1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

On peut aussi prendre le changement de variable $x - 1 = y$, ce qui nous permet d'avoir la série de MacLaurin de $\log(1 + y)$ (en $y_0 = 0$) :

$$\text{MacLaurin}(\log(1 + y)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

Convergence de la série

Calculons maintenant le rayon de convergence de cette série (on regarde celui de la série de Taylor, mais on pourra de toutes façons utiliser notre résultat pour la série de MacLaurin) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{k+1}{(-1)^{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

Ainsi, on en déduit que $]0, 2[\subset D$. Étudions $x = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

qui est la série harmonique, et donc qui diverge.

Étudions aussi $x = 2$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

qui est la série harmonique alternée, et qui converge par le critère de Leibniz.

Ainsi, on en déduit que $D =]0, 2]$.

Convergence vers $f(x)$

Calculons la limite du reste :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{u^{n+1}} n! \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{u} \right|^{n+1}$$

Ceci est une limite très difficile. On peut la simplifier en considérant uniquement x plus grand que $\frac{1}{2}$. Cependant, on peut démontrer (et on va démontrer ci-après dans ce cours) que le reste converge vers 0 quand $0 < x \leq 2$. Ainsi, $E = D =]0, 2]$.

Particulièrement, on remarque que, avec $x = 2$, on obtient la série harmonique alternée. Ainsi :

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Exemple 3

Prenons la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

On sait que la série de MacLaurin est donnée par la série géométrique ; en d'autres mots :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

On peut donc en déduire que $D = E =]-1, 1[$. En effet :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

puisque $|x| < 1$.

Exemple 4

Soit $f(x) = \sin(x)$. On sait que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus, on remarque que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x), & f''(x) &= -\sin(x), & f'''(x) &= -\cos(x), & f^{(4)}(x) &= \sin(x), & \dots \\ f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(0) &= -1, & f^{(4)}(0) &= 0, & \dots \end{aligned}$$

On peut donc calculer la série de MacLaurin :

$$\text{MacLaurin}(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, on peut démontrer que le domaine de convergence est tel que $D = \mathbb{R}$ à l'aide du critère de d'Alembert.

Calculons maintenant la limite du reste :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\sin(u) \text{ ou } \cos(u))}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On voit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on en déduit par le critère nécessaire de la convergence des séries :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, par le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ce qui nous permet d'en déduire que $E = D = \mathbb{R}$.

Séries de Taylor remarquables

Les séries de Taylor suivantes convergent vers leur fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$

Il est important de se souvenir des trois premières, mais $\sinh$ et $\cosh$ peuvent être retrouvées à partir de e^x (surtout si on se souvient que ce sont les fonctions paires et impaires qui décomposent e^x , et que le développement limité d'une fonction impaire n'a que des coefficients devant des x^k où k est impair, et de manière similaire pour les fonctions paires).

Remarque

On peut trouver une série de Taylor(f) telle que $E \neq D$. En effet, soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Calculons la dérivée en 0 :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \pm \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|}$$

Prenons le changement de variable $t = \frac{1}{x^2} \iff |x| = \frac{1}{\sqrt{t}}$:

$$f'(0) = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{t^{-\frac{1}{2}}} = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{t^{\frac{1}{2}} e^t} = 0$$

Calculons maintenant $f'(x)$, quand $x \neq 0$:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Ceci nous permet de calculer $f''(0)$:

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$$

On peut maintenant faire le changement de variable $t = \frac{1}{x^2}$, utiliser deux fois BL, et trouvera $f''(0) = 0$ (c'est un exercice au lecteur).

En continuant ainsi, on peut trouver que :

$$\text{Taylor}(f)_{x=0} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\text{Taylor}(f)_{x=0} \neq f(x)$ sauf pour $x = 0$. On en déduit donc que $D = \mathbb{R}$, mais $E = \{0\}$.

10.3 Primitive et dérivée d'une fonction définie par une série entière

Définition

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

La fonction $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur $[a, b]$ si :

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a, b[$$

Remarque

Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors :

$$F_1(x) = F_2(x) + \alpha, \quad \forall x \in [a, b], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On avait déjà démontré cela, c'est un des corollaires du théorème des accroissements finis.

Exemples

Nous pouvons déjà trouver les primitives suivantes :

$f(x)$	$F(x)$	D
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\log(x) + C$	$x > 0$
x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$	$k \neq -1, x > 0$
e^x	$e^x + C$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Théorème

1. Les deux séries entières suivantes ont le même rayon de convergence, r :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

2. Si $r > 0$, alors $f(x)$ est continue sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

3. Si $r > 0$, alors $F(x)$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ telle que $F(x_0) = 0$.

Preuve

Il faudrait la convergence uniforme des fonctions pour démontrer ce théorème (qui est “non-trivial” (je cite la professeure)).

Corollaire

Les deux séries entières suivantes ont le même rayon de convergence r .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

De plus, si $r > 0$, alors $f(x)$ est continûment dérivable sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, et $f'(x) = g(x)$.

Remarque

Le rayon de convergence est le même, mais le domaine de convergence ne l'est pas forcément : la convergence aux bornes peut varier.

Exemple

On sait que :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \forall z \in]-1, 1[$$

Prenons le changement de variable $x = 1 - z \iff z = 1 - x$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k, \quad \forall x \in]0, 2[$$

Ainsi, le rayon de convergence de cette série entière est $r = 1$.

Par le théorème qu'on vient de voir, la série entière suivante a le même rayon de convergence, 1, est la primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 2[$ et est telle que $F(1) = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \stackrel{\textcircled{=}}{=} \text{Taylor}(\log x)_{x=1}$$

(Notez que le smiley a été mis par la Professeure dans son cours, je ne me permettrais absolument pas d'une baisse de sérieux dans mes notes...Mes notes sont très sérieuses vous savez!)

Ceci nous permet de calculer résoudre le problème qu'on avait avec la limite ci-dessus. De plus, on a déjà vu que $\text{Taylor}(\log x)_{x=1}$ converge vers $\log(2)$ pour $x = 2$, donc on a :

$$E = D =]0, 2]$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k, \quad x \in]0, 2[$$

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k, \quad x \in]0, 2]$$

On note que les domaines de convergence des deux séries sont différents dans ce cas (même si les rayons de convergences sont égaux, puisqu'ils doivent l'être par le corollaire ci-dessus) !

Retour à un exemple de limite

Trouvons la valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$ telle que la fonction suivante admet un prolongement par continuité en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+3x+3x^2)}{2x \cos(x)}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{1+x^2} - (1-x)}{bx}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

Commençons par calculer la limite vers la droite, en utilisant le développement limité du logarithme naturel (l'intérieur du logarithme tend vers 1, donc on a bien le droit d'utiliser ce DL) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{\log(1+3x+3x^2)}^{\rightarrow 1}}{2x \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(3x+3x^2) + \varepsilon(x)(3x+3x^2)}{2x \cos(x)} \\ &= \frac{(3+3x) + \overbrace{\varepsilon(x)(3+3x)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{2 \cos(x)}_{\rightarrow 1}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Calculons aussi la limite vers la gauche :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1-x)}{bx} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2 - (1-x)^2}{bx(\sqrt{1+x^2} + (1-x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2 - 1 - 2x - x^2}{bx(\sqrt{1+x^2} + (1-x))} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{b \underbrace{(\sqrt{1+x^2} + (1-x))}_{\rightarrow 2}} \\&= \frac{2}{2b} = \frac{1}{b}\end{aligned}$$

On veut que les deux limites soient égales, donc $b = \frac{2}{3}$.

Chapitre 11

Calcul intégral

11.1 Intégrale d'une fonction continue

Subdivision Soit $[a, b]$ un intervalle. Une **subdivision** de $[a, b]$ est un ensemble tel que :

$$\sigma = \{x_0, = a < x_1 < x_2 < \dots x_n = b\}$$

On définit aussi le **pas de subdivision** tel que :

$$\mathcal{P}(\sigma) = \max\{x_i - x_{i-1}\}$$

Subdivision régulière Une subdivision régulière d'ordre n est donnée par :

$$\sigma = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + k \frac{b-a}{n}, \dots, b \right\} \implies \mathcal{P}(\sigma) = \frac{b-a}{n}$$

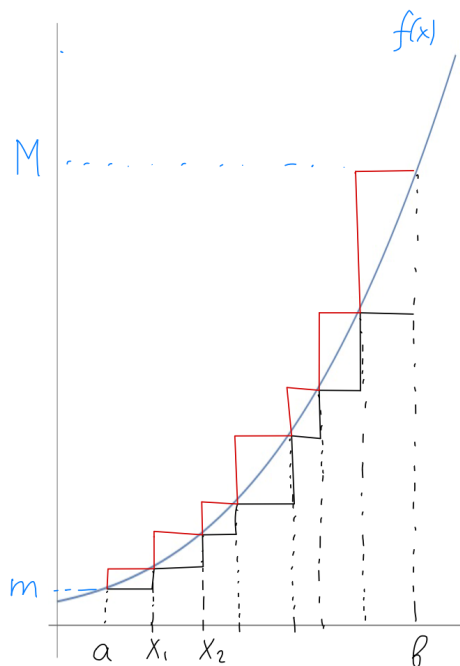
Définition : Soient $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et σ , une subdivision de $[a, b]$.
Sommes de Darboux Alors, la **somme de Darboux supérieure** de f relativement à σ est donnée par :

$$\overline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}), \quad \text{où } M_k = \max_{x_{k-1}, x_k} f(x)$$

De plus, la **somme de Darboux inférieure** de f relativement à σ est donnée par :

$$\underline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}), \quad \text{où } m_k = \min_{x_{k-1}, x_k} f(x)$$

On sait que ces minimums et maximums existent, les M_k et les m_k , puisque la fonction est continue et on considère un intervalle fermé borné.



Observation

On peut voir l'inégalité suivante :

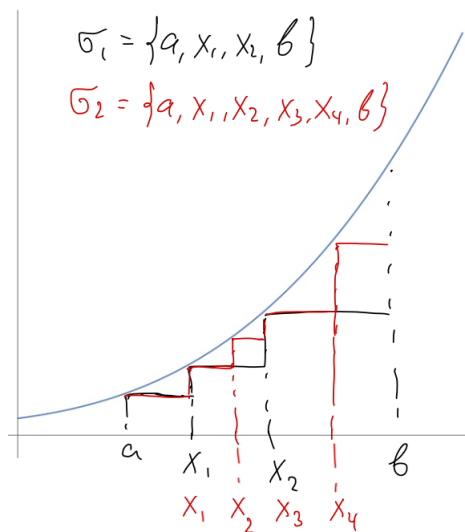
$$m(b-a) < \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

Avec :

$$m = \min_{[a,b]} f(x), \quad M = \max_{[a,b]} f(x)$$

Remarque

Regardons le dessin suivant :



Il est clair que, si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ (c'est-à-dire qu'on ajoute des points), alors :

$$\underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

Proposition

Soient :

$$\overline{S}(f) = \inf \{ \overline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a, b] \}$$

$$\underline{S}(f) = \sup \{ \underline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivisions de } [a, b] \}$$

Alors, si f est continue sur $[a, b]$, on a que $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$.

Note personnelle

Par l'inégalité qu'on a remarquée ci-dessus, je pense que cela implique que, par le théorème des deux gendarmes :

$$\overline{S}(f) = \underline{S}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_{\sigma_n}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S_{\sigma_n}}(f)$$

où $\{\sigma_n\}$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$$

Ce fait est utilisé ci-après, et je pense qu'il découle de là.

Définition : intégrale de Riemann

Soit $f : [a, b] : \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Alors, on définit **l'intégrale de Riemann** de la fonction f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

Terminologie

On appelle le a la borne inférieure, le b la borne supérieure, et le x la variable d'intégration.

Note personnelle

On donne le nom de Riemann à cette définition car on peut aussi définir d'autres intégrales, comme l'intégrale de Lebesgue.

Définition : échange de borne

Si $b < a$, alors on définit :

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} - \int_b^a f(x) dx$$

De plus, si $b = a$:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Calcul d'intégrale

On remarque qu'on peut calculer nos intégrales de la manière suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_{\sigma_n}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S_{\sigma_n}}(f)$$

où $\{\sigma_n\}$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\sigma_n) = 0$$

Exemple

Supposons que nous voulons calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^3 x dx$$

Prenons la suite de subdivisions suivante :

$$\sigma_n = \left\{ 0, \frac{3}{n}, 2 \cdot \frac{3}{n}, \dots, (n-1) \frac{3}{n}, 3 \right\}$$

Ce sont des subdivisions où $x_k = k \cdot \frac{3}{n}$, donc des subdivisions régulières.

Puisque la fonction est croissante, on a :

$$M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{3k}{n}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{3(k-1)}{n}$$

Ainsi, on peut calculer les sommes de Darboux :

$$\overline{S_{\sigma_n}}(f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3k}{n} \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3(k-1)}{n} \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{9}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$$

On peut maintenant calculer leur limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n+1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n-1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

Ce qui était attendu, puisqu'on a un théorème disant que ces deux sommes se rejoignent quand $n \rightarrow \infty$ si la fonction est continue. On a donc :

$$\int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$$

Ce qui est bien l'aire sous la courbe ; nous aurions pu la calculer en considérant le triangle qu'elle dessine.

Propriété 1

Soit $f(x)$ continue sur $[a, b]$, et $c \in [a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Propriété 2

Comme mentionné plus tôt :

$$m(b-a) < \underline{S}_{\sigma}(f) \leq \overline{S}_{\sigma}(f) \leq M(b-a)$$

Où :

$$m = \min_{[a,b]} f(x), \quad M = \max_{[a,b]} f(x)$$

Ainsi, on en déduit que :

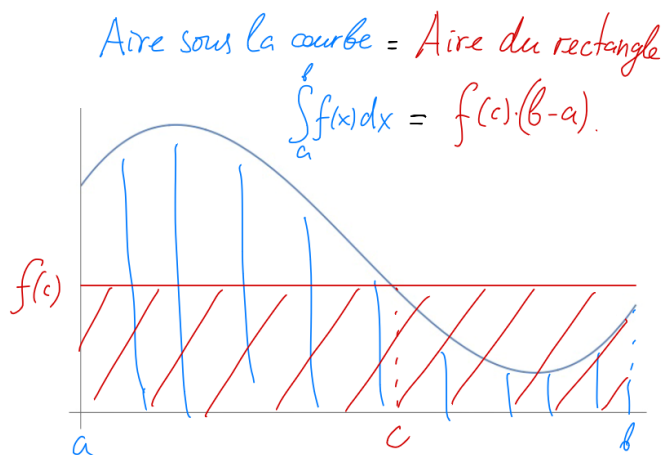
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Théorème de la moyenne

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Alors, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



Intuition

Ce théorème peut être compris de deux manières différentes. La première est, comme sur l'image ci-dessus, de voir qu'il existe un

point c tel que l'aire du rectangle de hauteur $f(c)$ est égal à l'aire sous la courbe.

Pour voir ce théorème de la deuxième manière, on peut diviser des deux côtés par $b - a$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Ainsi, on voit qu'il existe un point c tel que $f(c)$ est la valeur moyenne de la fonction sur cet intervalle.

Preuve

On sait que :

$$m(b-a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Avec :

$$m = \min_{[a,b]} f(x), \quad M = \max_{[a,b]} f(x)$$

Puisque f est continue sur $[a, b]$, on en déduit par le théorème de la valeur intermédiaire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \implies f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

□

11.2 Relation entre l'intégrale et la primitive

Rappel

Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue $f(x)$ sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que :

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a, b[$$

De plus, on sait que si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors :

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in [a, b] \quad F_1(x) = F_2(x) + C$$

Théorème fondamental du calcul intégral partie 1

Soient $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Alors, la fonction suivante est la primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$ telle que $F(a) = 0$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Note

Notez que, puisqu'on utilise x dans les bornes de l'intégrale, alors on ne peut pas l'utiliser comme variable d'intégration. Cependant, c'est une "*dummy variable*", donc on pourrait utiliser n'importe quel symbole (comme $\ominus$, par exemple).

Preuve

Soit $x_0 \in]a, b[$. Considérons la fraction suivante :

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &= f(c(x)) \text{ où } c(x) \text{ est un point entre } x_0 \text{ et } x \end{aligned}$$

par le théorème de la moyenne.

Ainsi, on peut considérer la limite. On sait que la fonction est continue, donc :

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(c(x)) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

On a donc trouvé que :

$$F'(x_0) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in]a, b[$$

Finalement, on voit que, par définition :

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Il nous faudrait aussi vérifier les égalités suivantes pour être complètement formels, mais nous ne le ferons pas ici.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b)$$

□

Corollaire : Théorème fondamental du calcul intégral partie 2

Soient $a < b$ et $f(x)$ continue sur $[a, b]$.

Si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Preuve

On sait déjà que la fonction suivante est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors, on a $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in [a, b]$. Ainsi, on en déduit que :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

□

Note personnelle

Comme d'habitude, l'intuition derrière les maths est très importante pour moi. Je me permets donc de vous diriger vers deux vidéos de 3Blue1Brown. Premièrement, voici l'explication de pourquoi on peut calculer des intégrales définies (donc des aires) à l'aide de primitives :

<https://www.youtube.com/watch?v=rfG8ce4nNh0>

De plus, voici sa vidéo expliquant plus en détails le lien entre l'aire et la pente, pourquoi calculer la pente est l'opération inverse à calculer une aire :

<https://www.youtube.com/watch?v=FnJqaIESC2s>

(Oui, si vous ne l'aviez pas compris, 3Blue1Brown est un crack absolu, et va complètement nous carry pendant nos études.)

Primitives remarquables - On peut dessiner les tableaux suivants :

$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\log a} a^x + C$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

Remarque Il est beau que l'intégrale de 0 jusqu'à π — un nombre transcendant — de $\sin(x)$ donne un nombre naturel.

Linéarité

Les intégrales sont linéaires :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

En effet, on a que :

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

Relation d'ordre Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Idée de preuve Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, pour tout $c \in]a, b[$:

$$0 \leq \int_a^c f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

En effet, $F'(x) = f(x) \geq 0$, donc $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est croissant sur $[a, b]$ et $F(a) = 0$.

Corollaire Si $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

Dérivée d'une intégrale avec des fonctions comme bornes

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g, h : I \mapsto [a, b]$ dérivables sur I . Alors :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Preuve

Considérons l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt &= \int_{h(x)}^a f(t)dt + \int_a^{g(x)} f(t)dt \\
&= \int_a^{g(x)} f(t)dt - \int_a^{h(x)} f(t)dt \\
&= F(g(x)) - F(h(x))
\end{aligned}$$

où $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \right) &= F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) \\
&= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)
\end{aligned}$$

Exemple (courant en examen)

Disons que nous voulons calculer la dérivée suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{3x^2+3x} e^{t^2} dt \right)$$

Ceci n'est pas une intégrale qu'on peut calculer avec des fonctions élémentaires, donc nous *devons* utiliser la proposition ci-dessus. Ainsi :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{3x^2+3x} e^{t^2} dt \right) = e^{(3x^2+3x)^2} (6x+1) - e^{1^2} (1)' = e^{(3x^2+3x)^2} (6x+1)$$

11.3 Techniques d'intégration

Proposition : Formule de changement de variableSoit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ continûment dérivable sur I , où $[\alpha, \beta] \subset I$.

Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad \text{où } x = \varphi(t)$$

*Preuve*Soit $G(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)dx$. On sait que sa dérivée est donnée par :

$$G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) := g(t)$$

Puisque $G(t)$ est une primitive de $g(t)$ sur $[\alpha, \beta]$, alors, par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Ainsi, par la définition de ces fonctions :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_a^{\varphi(\beta)} f(x)dx - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(x)dx \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx
\end{aligned}$$

□

Exemple 1 Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx$$

À nouveau, e^{x^2} est une fonction très dure à intégrer, donc faisons un changement de variable. Soit $x = \sqrt{t} = \varphi(t) : [1, 4] \mapsto [1, 2]$. On voit que $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Ainsi, on trouve :

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx = \int_1^4 \sqrt{t} e^t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e)$$

Pour nous simplifier la vie, on peut utiliser une méthode plus rapide. Si on prend $u = x^2$, alors on a $\frac{du}{dx} = 2x$ et donc $\frac{1}{2} du = x dx$. De plus, on voit que $u(1) = 1$ et $u(2) = 4$. De là, on trouve que :

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx = \int_1^2 e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e)$$

— Mercredi 15 décembre 2021 — **Cours 24 : "Les intégrales c'est un art" (prof. Lachowska)**

Remarque

Pour le changement de variable, si on a $u = f(x)$, alors c'est comme si on avait :

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \implies du = f'(x) dx = \frac{d(f(x))}{dx} dx = d(f(x))$$

On peut manipuler ces formes différentielles car $df(x)$ veut dire, géométriquement, le petit changement de f .

Ainsi, par exemple :

$$\int g(x) f'(x) dx = \int g(x) d(f(x))$$

Exemple 2

Calculons l'intégrale indéfinie suivante (on veut la primitive la plus générale, donc avec un $+C$) :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

La première méthode est de prendre le changement de variable $x = \sin(t) = \varphi(t)$, donc :

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos(t) \implies dx = \varphi'(t) dt = \cos(t) dt$$

Ainsi, on peut revenir à notre intégrale :

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\sin(t) \cos(t)}{\cos(t)} dt \\ &= \int \sin(t) dt \\ &= -\cos(t) + C \\ &= -\cos(\arcsin(x)) + C \\ &= -\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} + C \\ &= -\sqrt{1 - x^2} + C \end{aligned}$$

Une autre manière de résoudre cette intégrale est de voir qu'il y a la dérivée de $1 - x^2$ à une constante près au numérateur. Ainsi, prenons $u = 1 - x^2 \implies du = -2x dx$:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{-1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} + C = -u^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Exemple 3

Calculons l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Ceci n'est pas une intégrale facile, mais on peut se rendre compte que multiplier par $\sin(x)$ au numérateur et au dénominateur va nous aider :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = - \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx$$

Ainsi, on peut prendre le changement de variable $u = \cos(x) \implies du = -\sin(x)dx$:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = - \int \frac{du}{1 - u^2} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} \log|1 - u| - \frac{1}{2} \log|1 + u| + C$$

Et ainsi :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - u}{1 + u} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right| + C$$

En effet, la primitive de $\frac{1}{x}$ est donnée par $\log|x| + C$ pour tout x qui n'est pas zéro. Il faut tout de même faire attention qu'on n'a pas le droit de calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \log|1| - \log|1|$ puisque $\frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1, 1]$.

Une autre méthode pour calculer cette intégrale est d'utiliser le trick suivant :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} dx$$

Ainsi, on peut prendre la changement de variable suivant :

$$\int \frac{\sin(\frac{x}{2}) d(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} + \int \frac{\cos(\frac{x}{2}) d(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = - \int \frac{d(\cos \frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} + \int \frac{d(\sin \frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = -\log \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \log \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C$$

Les deux résultats que nous avons obtenu à l'aide de nos deux méthodes sont bien égaux, on peut le vérifier à l'aide des identités trigonométriques.

<i>Citation de la prof</i>	"Les dérivées c'est du travail manuel, les intégrales c'est un art" (prof. Lachowska) Et je suis complètement d'accord avec elle, les intégrales c'est beaucoup plus marrant ! Et encore, on n'a pas vu les équations différentielles. ☺
----------------------------	--

Remarque

Parfois, deux expressions sont égales à une constante près. Par exemple :

$$\log(5x) = \log(5) + \log(x) = \log(x) + C$$

$$\tan^2(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1 - \cos^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(t)} + C$$

**Proposition :
intégration par
partie**

Soient $g, f : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables sur I , où $[a, b] \subset I$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

*Preuve*Considérons la dérivée de $(fg)(x)$:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \iff f(x)g'(x) &= (fg)'(x) - f'(x)g(x)\end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant des deux côtés :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b (fg)'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\end{aligned}$$

En effet, une primitive de la dérivée d'une fonction est cette fonction.

□

Mnémotechnie

On peut écrire notre résultat sous la forme suivante :

$$\int_a^b f dg = fg\Big|_a^b - \int_a^b g df$$

Utilité

Cette méthode marche très bien pour :

- polynômes $\cdot (\log x)^k$
- polynômes $\cdot \sin(x)$
- polynômes $\cdot \cos(x)$
- polynômes $\cdot e^x$

Note personnelle

Personnellement, je ne connais pas cette formule. Je préfère utiliser la méthode DI, de BlackPenRedPen. Voici une vidéo où il l'explique :

https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8csw

Concrètement, on dessine le tableau suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{D} \\ \text{I} \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{cc} f(x) & g'(x) \\ f'(x) & g(x) \end{array} \end{array}$$

On dérive la fonction sous le D et on intègre celle sous le I.

Notre intégrale nous est donnée par la diagonale $f(x)g(x)$, à laquelle on ajoute l'intégrale de la dernière ligne $-f'(x)g(x)$ (le signe va toujours avec la colonne du D). Un gros avantage de cette méthode c'est qu'on n'a pas besoin de connaître la formule, qu'on peut l'appliquer directement, mais aussi qu'on peut l'appliquer plusieurs fois d'affilée. Par exemple, si on veut calculer l'intégrale de $x^2 e^x$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{D} \\ \text{I} \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} & \begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \end{array}$$

À nouveau, notre intégrale est donnée par la somme des diagonales (où le signe va avec la première colonne), à laquelle on ajoute l'intégrale de la dernière ligne :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - x e^x + \int e^x dx + C$$

Finalement, on peut noter que si on atteint un 0 dans la dernière ligne (par dérivation ; par intégration c'est peu probable qu'un 0 apparaisse), on obtient directement notre intégrale :

	D	I
+	x^2	e^x
-	x	e^x
+	1	e^x
-	0	e^x

Donc, on a :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - x e^x + e^x - \underbrace{\int 0 \cdot e^x dx}_0 + C$$

Exemple 1

Calculons l'intégrale suivante par partie :

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(\log x)^2}_{f(x)} d \underbrace{x}_{g(x)} &= x(\log x)^2 - \int \underbrace{(2 \log x) \frac{1}{x}}_{f'(x)} \underbrace{x}_{g(x)} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \underbrace{\log(x)}_{f(x)} d \underbrace{x}_{g(x)} \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log(x) + 2 \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log(x) + 2x + C \end{aligned}$$

Note personnelle

Avec la méthode DI, on aurait fait le tableau suivant :

	D	I
+	$(\log x)^2$	1
-	$2 \log(x) \frac{1}{x}$	x

Donc, note intégrale est donnée par :

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log(x) dx + C_1$$

On peut à nouveau appliquer la méthode DI :

	D	I
+	$\log x$	1
-	$\frac{1}{x}$	x

Ainsi, $\int \log(x) dx = x \log(x) - \int dx = x \log(x) - x$. On peut l'appliquer dans notre première intégrale :

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - 2 \int \log(x) dx + C_1 \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log(x) + 2x + C \end{aligned}$$

Exemple 2 Calculons l'intégrale suivante par partie :

$$\begin{aligned}
 \int \sin(x)e^x dx &= \int \sin(x)de^x \\
 &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx \\
 &= e^x \sin(x) - \int e^x d(\sin x) \\
 &= e^x \sin(x) - e^x \sin(x) + \int \sin(x)e^x dx \\
 &= \int \sin(x)e^x dx
 \end{aligned}$$

On a donc trouvé que notre intégrale était égale à elle-même, ce qui est juste, mais ne nous aide pas. ☹ On en déduit que commencer en intégrant $f'(x)$ et en dérivant $g(x)$, puis de dériver $f(x)$ et d'intégrer $g'(x)$ (donc d'inverser les intégrations et dérivations à la deuxième étape) ne nous mène nulle part.

Réessayons, mais cette fois en intégrant deux fois le $\sin(x)$ et en dérivant le e^x (notez qu'on aurait aussi pu choisir d'intégrer deux fois le e^x et de dériver $\sin(x)$) :

$$\begin{aligned}
 \int \sin(x)e^x dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx \\
 &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x (-\sin(x))dx + C_1 \\
 &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin(x)dx + C_1
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé que :

$$\begin{aligned}
 \int \sin(x)e^x dx &= e^x (\sin x - \cos x) - \int \sin(x)e^x dx + C_1 \\
 \iff 2 \int \sin(x)e^x dx &= e^x (\sin x - \cos x) + C_1 \\
 \iff \int \sin(x)e^x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C
 \end{aligned}$$

Remarque

On peut donc voir que si, en calculant notre intégrale, on retombe sur notre intégrale de départ avec un signe négatif ou un facteur multiplicatif (simplement différent de 1), alors on peut la trouver directement. Cette méthode marche typiquement pour intégrer les fonctions suivantes :

$$\cos(x)e^x, \quad \sin(x)e^x$$

Exemple 3

Calculons l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(\sqrt{x})}{(x-1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\log(x)}{(x-1)^2} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \log(x) \left(\frac{1}{x-1} \right)' dx \\
&= \frac{-1}{2} \int \log(x) d\left(\frac{1}{x-1} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\log(x)}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\log x}{x-1} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\log x}{x-1} + \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x| + C
\end{aligned}$$

On peut vérifier notre résultat en le dérivant.

Intégration des fonctions rationnellesL'intégrale de fonctions rationnelles, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, s'exprime toujours en termes de fonctions élémentaires.

Notez que ce n'est de loin pas le cas de toutes les fonctions. Par exemple, $\int \sin(x) \log(x) dx$ ou $\int e^{x^2} dx$ existent bien puisque ces fonctions sont continues, mais elles ne sont pas exprimables à l'aide de fonctions élémentaires (fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielles, inverses, etc).

Pour commencer, on sait qu'on peut toujours calculer la division de nos deux polynômes, de manière à avoir un polynôme (dont l'intégrale est très facile à calculer) auquel on ajoute un reste. Ce reste est toujours de telle forme que son numérateur est de degré strictement inférieur à celui de son dénominateur. De plus, on sait qu'on peut toujours factoriser un polynôme à coefficients réels à l'aide de polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Ainsi, on peut toujours appliquer les fonctions partielles pour séparer notre reste en termes de la forme :

1. $\frac{1}{ax+b}, \quad a \neq 0$
2. $\frac{(cx+d)}{(x-a)(x-b)}, \quad a \neq b$
3. $\frac{1}{(ax+b)^k}, \quad k \geq 2$
4. $\frac{1}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q < 0$
5. $\frac{x}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q < 0$
6. $\frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad n \geq 2$
7. $\frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad n \geq 2$

Étudions tous ces cas.

Note personnelle

La professeure nous conseille d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les fractions partielles (voir le cas 2), cependant, à titre personnel, je trouve que la "cover-up method" de BlackPenRedPen (et oui, encore lui ☺) est plus pratique et rapide pour trouver ces coefficients. Voici un lien où il en parle :

<https://www.youtube.com/watch?v=qckgd4QhFbs>

*Cas 1*Soit $a \neq 0$. Alors :

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \log|ax+b| + C$$

Cas 2

Soit $a \neq b$, alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{(cx+d)dx}{(x-a)(x-b)} &= \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) dx \\ &= A \log|x-a| + B \log|x-b| + C \end{aligned}$$

De tels A et B existent toujours, un théorème d'algèbre l'affirme ; c'est ce qu'on appelle les fractions partielles. Pour les trouver, on peut utiliser les coefficients indéterminés ; en multipliant les deux côtés par $(x-a)(x-b)$:

$$\begin{aligned} \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \\ \iff A(x-b) + B(x-a) &= cx+d \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} -Ab - Ba = d \\ A + B = c \end{cases}$$

Qu'on peut résoudre :

$$A = \frac{ac-d}{a-b}, \quad B = c-A$$

Cas 3

Soit $k \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax+b)^k} &\stackrel{t=ax+b}{=} \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^k} \\ &= \frac{1}{a} \int t^{-k} dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-k+1} t^{-k+1} + C \\ &= \frac{1}{a(1-k)} (ax+b)^{-k+1} + C \end{aligned}$$

Cas 4

Supposons qu'on n'a aucune racine réelle, donc si $p^2 - 4q < 0$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

Puisque $p^2 - 4q < 0$, alors on a $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Ainsi, prenons $c^2 = q - \frac{p^2}{4}$. De plus, prenons le changement de variable $u = x + \frac{p}{2}$:

$$\int \frac{du}{u^2 + c^2} = \frac{1}{c^2} \int \frac{cd\left(\frac{u}{c}\right)}{\left(\frac{u}{c}\right)^2 + 1} \stackrel{t=\frac{u}{c}}{=} \frac{1}{c} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{c} \arctan(t) + C$$

Et ainsi, on trouve que :

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C$$

Cas 5

Supposons à nouveau que le dénominateur n'ait pas de racine réelle, donc que $p^2 - 4q < 0$:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + px + q} = \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{2}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx$$

À nouveau, $p^2 - 4q < 0$, donc prenons $c^2 = q - \frac{p^2}{4}$. De plus, on peut prendre le changement de variable $u = x + \frac{p}{2}$:

$$\int \frac{\left(u - \frac{p}{2}\right) du}{u^2 + c^2} = \int \frac{u du}{u^2 + c^2} - \frac{p}{2} \int \frac{du}{u^2 + c^2}$$

On sait calculer la deuxième intégrale par le cas 4, mais nous devons calculer $\int \frac{u du}{u^2 + c^2}$. Pour cela, prenons le changement de variable $t = u^2 + c^2 \Rightarrow dt = 2u du$:

$$\int \frac{u du}{u^2 + c^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log|t| + C = \frac{1}{2} \log|u^2 + c^2| + C$$

Ce qui nous permet de conclure que le premier terme de cette somme d'intégrales est donné par :

$$\int \frac{u du}{u^2 + c^2} = \frac{1}{2} \log|x^2 + px + q| + C$$

Cas 6

Soit $n \geq 2$. Calculons l'intégrale suivante en prenant le changement de variable $x = \tan(t) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^n} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \int (\cos t)^{2(n-1)} dt$$

Or, on peut passer par la formule de De Moivre pour exprimer la fonction suivante sous la forme d'une somme de sinus et de cosinus d'angles multiples :

$$(\cos(x))^n = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$$

Par exemple :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Cas 7

Finalement, soit $n \geq 2$; calculons :

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^n}$$

Prenons le changement de variable $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2xdx$:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{-n+1} u^{-n+1} + C$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)} (x^2 + 1)^{-n+1} + C$$

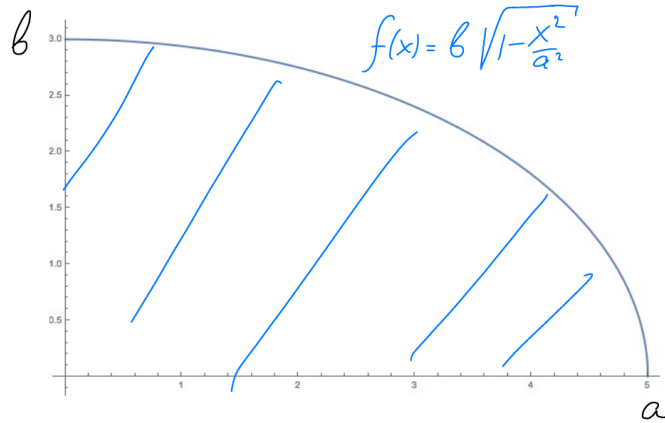
Exemple

Les intégrales sont utiles pour calculer des aires, calculons donc l'aire d'une ellipse. L'équation des ellipses est donné par :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \implies y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \implies y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Ainsi, on peut prendre la partie positive, et l'intégrer entre 0 et a de manière à uniquement avoir $\frac{1}{4}$ de l'aire [mettre dessin prof] :

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$



Prenons le changement de variable $u = \frac{x}{a} \implies du = \frac{1}{a}dx$. De plus, on remarque que $u(0) = 0$ et $u(a) = 1$; ainsi :

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$$

Prenons maintenant le changement de variable $u = \sin(t) \implies du = \cos(t)dt$. De plus, on voit que $u \in [0, 1] \implies t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$ab \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2(t)) dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Donc, un quart de l'aire de l'ellipse est égal à :

$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{1}{4}\pi ab$$

Ainsi, on en déduit que l'aire d'une ellipse est donnée par :

$$A_{\text{ellipse}} = \pi ab$$

ce qui est cohérent avec l'aire d'un cercle, où $a = b = r$.

<i>Note personnelle</i>	L'aire d'une ellipse a une formule très simple, cependant c'est loin de la formule pour la périmètre d'une ellipse :
--	--

**Area of an
Ellipse**

$$A = \pi ab$$

**Perimeter of an
Ellipse**

$$P = 4aE\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \\ = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2(\theta)} d\theta$$



Voici une très bonne vidéo de Matt Parker, alias Stand-up Maths (qui a participé dans plusieurs vidéos de Numberphile, et qui est absolument incroyable), où il en parle :

<https://www.youtube.com/watch?v=5nW3nJhBHL0>

Lundi 20 décembre 2021 — Cours 25 : Intégrales généralisées

11.4 Intégrales généralisées

11.4.1 Intégrales généralisées sur un intervalle borné

Définition

Soient $a < b$ et $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, on définit l'intégrale généralisée par la limite :

$$\int_a^{b^-} f(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

si cette limite existe. Si elle n'existe pas, alors $\int_a^{b^-} f(t) dt$ est divergente.

De la même manière soient $a < b$ et $f :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, on définit l'intégrale généralisée par la limite :

$$\int_{a^+}^b f(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

si cette limite existe. Si elle n'existe pas, alors $\int_{a^+}^b f(t) dt$ est divergente.

Exemple 1

Calculons l'aire sous la courbe de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, où $x \in]0, 1]$. Ceci est donné par une intégrale généralisée :

$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left. \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right|_h^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 \underbrace{(1 - \sqrt{h})}_{\rightarrow 1} = 2$$

Exemple 2

Calculons l'aire sous la courbe de $y = \frac{1}{x}$, où $x \in]0, 1]$:

$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\log(1) - \underbrace{\log(t)}_{\rightarrow -\infty} \right) = +\infty$$

L'intégrale généralisée $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x}$ est donc divergente.

On remarque donc, qu'aux premiers abords, sans faire de calcul, il n'est pas facile de dire si une intégrale généralisée va converger ou diverger.

**Proposition :
Critère de com-
paraison**

Soient $f, g : [a, b[$ deux fonctions continues telles qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que :

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [c, b[$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^{b-} g(x) dx \text{ converge} &\implies \int_a^{b-} f(x) dx \text{ converge} \\ \int_a^{b-} f(x) dx \text{ diverge} &\implies \int_a^{b-} g(x) dx \text{ diverge} \end{aligned}$$

Il existe un critère similaire pour $f, g :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continues.

Exemple

Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha}, \quad a < b, \alpha \neq 1$$

Prenons le changement de variable $u = b - t \implies du = -dt$. De plus, on remarque que $t = a \implies u = b - a$ et $t = b^- \implies u = 0^+$. On trouve donc :

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = - \int_{b-a}^{0^+} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\alpha + 1} u^{-\alpha+1} \Big|_x^{b-a}$$

Ce qui nous donne la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left((b-a)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} \right)$$

Cette limite dépend de α . Si $1 - \alpha > 0$, alors la limite de $x^{1-\alpha}$ est 0, sinon elle diverge :

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Étudions maintenant le cas où $\alpha = 1$:

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{b-t} = - \lim_{x \rightarrow b^-} \left(\underbrace{\log(b-x)}_{\rightarrow -\infty} - \log(b-a) \right) = +\infty$$

Ainsi, pour résumer :

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

C'est une formule qu'il faut connaître, car elle est très pratique pour le critère de comparaison.

Corollaire

Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)(b-x)^\alpha = \ell \in \mathbb{R}^* \quad (\text{donc } \ell \neq 0)$$

Alors, l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{b-} f(t) dt = \begin{cases} \text{converge}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

D'une façon similaire, soit $f :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)(x-a)^\alpha = \ell \in \mathbb{R}^*$$

Alors, l'intégrale généralisée :

$$\int_{a^+}^b f(t)dt = \begin{cases} \text{converge} , & \alpha < 1 \\ \text{diverge} , & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

*Preuve du
premier point*

Soit $\ell > 0$. On sait que $\lim_{x \rightarrow b^-} (x-b)^\alpha f(x) = \ell$, donc :

$$\exists x \in [a, b[\text{ tel que } \forall x \in [c, b[\text{ on a } \frac{1}{2}\ell \leq \underbrace{(b-x)^\alpha}_{>0} f(x) \leq \frac{3}{2}\ell$$

On trouve donc que :

$$\frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

On peut utiliser le critère de convergence dans les deux cas (pour le cas de la convergence et celui de la divergence).

□

*Note person-
nelle*

On choisit $b-x$ et $x-a$ de manière à ce que ce soit toujours positif. En effet, on n'aurait pas envie d'avoir à prendre la racinée carrée d'un nombre négatif.

Exemple

On se demande si l'intégrale généralisée suivante converge :

$$\int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

Il est impossible d'exprimer la primitive en terme de fonctions élémentaires, nous devons donc utiliser notre théorème ci-dessus. On voit que $\sqrt{1-t^3} = \sqrt{(1-t)(1+t+t^2)}$, ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} \stackrel{\alpha \neq \frac{1}{2}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, on sait par notre corollaire que $\int_0^{1^-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ est convergente.

Définition

Soient $a < b$, $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ continue, et $c \in]a, b[$ arbitraire.

Alors, l'intégrale généralisée :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)dt \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^{b^-} f(t)dt$$

Elle converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

Choix du c

La définition ne dépend pas du choix de c . En effet, prenons un autre nombre $d \in]a, b[$. Supposons que $d > c$ (la preuve est similaire

si $d < c$). Alors :

$$\begin{aligned}\int_{a^+}^{b^-} f(t)dt &= \int_{a^+}^d f(t)dt + \int_d^{b^-} f(t)dt \\ &= \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt + \int_d^{b^-} f(t)dt \\ &= \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^{b^-} f(t)dt\end{aligned}$$

(Ce paragraphe a été pris en note à partir d'une explication orale de la Professeure. Il est probable qu'il y ait une erreur, mais l'idée est là.)

Exemple

Nous voulons savoir si l'intégrale généralisée suivante converge :

$$\int_{0^+}^{1^-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} + \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$

Pour la première intégrale, on cherche un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0 \text{ et } \neq \infty$$

On se rend compte qu'il faut prendre $\alpha = r$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r}{x^r(1-x)^s} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^s} = 1$$

On en déduit que $\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$ converge si et seulement si $r < 1$.

On cherche maintenant un $\alpha \in \mathbb{R}$ similaire pour la deuxième intégrale :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)(1-x)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{x^r(1-x)^s} = \ell \neq 0 \text{ et } \neq \infty$$

On peut voir que $\alpha = s$ fonctionne :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^s}{x^r(1-x)^s} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^r} = 1$$

Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$ converge si et seulement si $s < 1$.

On en déduit que notre intégrale originelle, $\int_{0^+}^{1^-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$, converge si et seulement si $r < 1$ et $s < 1$.

11.4.2 Intégrales généralisées sur un intervalle non-borné

Définition

Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_a^\infty f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

si la limite existe. Si la limite n'existe pas, alors l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t)dt$ est divergente.

De la même manière, soit $f :]-\infty, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$$

si la limite existe. Si la limite n'existe pas, alors l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple 1

Calculons l'aire sous la courbe de $f(x) = \frac{1}{x \log(x)}$, où $x \in [e, +\infty[$:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \log(t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t \log(t)}$$

Prenons le changement de variable $u = \log(t) \implies du = \frac{dt}{t}$. On remarque que $\log(e) = 1$ et $y = \log(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u} = \lim_{y \rightarrow \infty} \log|u| \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} (\log(y) - \log(1)) = \infty$$

Donc, $\int_e^\infty \frac{dt}{t \log(t)}$ diverge.

Exemple 2

Calculons l'aire sous la courbe de $f(x) = \frac{1}{x(\log(x))^2}$, où $x \in [e, \infty[$:

$$\int_e^\infty \frac{dt}{t(\log(t))^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t(\log(t))^2}$$

Faisons le même changement de variable que celui dans l'exemple ci-dessus :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{u} \right) \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{y} + 1 \right) = 1$$

Critère de comparaison

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x > c$ pour un certain $c > a$, alors :

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ converge} \implies \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge} \implies \int_a^\infty g(x)dx \text{ diverge}$$

Exemple

Soit $\beta \neq 1$. Calculons l'intégrale généralisée suivante :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} (R^{1-\beta} - 1)$$

Qui ne converge que si $\beta > 1$. Étudions aussi $\beta = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\log(R) - \log(1)) = \infty$$

qui est divergente.

Ceci nous permet de conclure que :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1}, & \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \beta \leq 1 \end{cases}$$

Comparaison

On peut comparer ce résultat avec celui qu'on a obtenu plus tôt :

$$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Note personnelle : intuition

Quand on intègre de telles fonctions, on diminue la puissance au dénominateur de 1. On remarque qu'il faut avoir quelque chose sous la forme $\frac{1}{x^c}$, $c > 0$ pour que la limite quand $x \rightarrow \infty$ converge (x^c

diverge clairement); et il faut avoir quelque chose sous la forme x^c , $c > 0$ pour que la limite quand $x \rightarrow 0$ converge ($\frac{1}{x^c}$ diverge clairement).

Corollaire

Soient $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^\beta = \ell \in \mathbb{R}^* \text{ (donc } \ell \neq 0 \text{)}$$

Alors, $\int_a^\infty f(t)dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$, et diverge si et seulement si $\beta \leq 1$. Alors, l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \begin{cases} \text{converge,} & \beta > 1 \\ \text{diverge,} & \beta \leq 1 \end{cases}$$

Comparaison

On peut comparer ce résultat avec celui qu'on avait obtenu plus tôt :

$$\int_a^{b^-} f(t)dt = \begin{cases} \text{converge,} & \alpha < 1 \\ \text{diverge,} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Note personnelle : mnémotechnique

Pour retrouver si notre constante doit être plus grande que 1 ou plus petite que 1 pour que notre intégrale converge, il nous suffit de regarder une fonction simple, telle que $\frac{1}{x^2}$. En effet :

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{x^2} \text{ diverge} \implies \alpha < 1 \text{ pour la convergence}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ converge} \implies \beta > 1 \text{ pour la convergence}$$

Il nous suffit de se souvenir que le point important est 1, qui ne converge jamais.

Exemple

Nous nous demandons si l'intégrale généralisée suivante converge :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

Notez que, à nouveau, la primitive ne peut pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires. Utilisons notre corollaire ci-dessus :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} \stackrel{\beta = \frac{3}{2}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} = 1 \neq 0 \text{ et } \neq \infty$$

Or, $\beta = \frac{3}{2} > 1$, donc l'intégrale converge.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a, +\infty]$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^\infty f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{a^+}^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt, \quad \text{pour un } c \in]a, \infty]$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

La définition ne dépend pas du choix du c .

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, on peut aussi considérer l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt, \quad c \in \mathbb{R}$$

qui est convergente si et seulement si les deux intégrales convergent.

La définition ne dépend pas du choix du c .

Exemple 1

On se demande si l'intégrale généralisée suivante est convergente :

$$\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)}$$

Utilisons notre corollaire ci-dessus :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{\sin^2(x)} \stackrel{\alpha \equiv 2}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\sin^2(x)} = 1$$

Or, $\alpha = 2 > 1$, donc on sait que cette intégrale diverge.

Nous aurions aussi pu utiliser que la primitive de $\frac{1}{\sin^2(x)}$ est $-\cot(x)$:

$$\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\cot(x)) \Big|_{\varepsilon}^{\pi/2}$$

Ce qui nous donne :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(- \underbrace{\left(\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{=0} + \underbrace{\cot(\varepsilon)}_{\rightarrow \infty} \right) = \infty$$

Exemple 2

Nous volons calculer l'intégrale généralisée suivante, si elle converge :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

Utilisons le critère de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^\beta}{x^2 + 4x + 9} \stackrel{\beta \equiv 2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 9} = 1 \in \mathbb{R} \text{ et } \neq 0$$

Puisque $\beta = 2 > 1$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ converge.

Calculons maintenant la valeur de cette intégrale. On remarque que c'est une fonction rationnelle, et que son dénominateur a un discriminant négatif. Ainsi, nous devons utiliser la complétion du carré :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{(x+2)^2 + 5} + \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2 + 5}$$

Prenons le changement de variable $u = \frac{x+2}{\sqrt{5}} \implies du = \frac{1}{\sqrt{5}} dx$. On remarque que $x = -2 \implies u = 0$, $x \rightarrow +\infty \implies u \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty \implies u \rightarrow -\infty$. Ainsi, notre intégrale est égale à :

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 \frac{\sqrt{5} du}{5u^2 + 5} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sqrt{5} du}{5u^2 + 5} = \lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_R^0 \frac{du}{u^2 + 1} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^R \frac{du}{u^2 + 1}$$

On voit la dérivée de $\arctan(x)$, donc :

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan(u) \Big|_R^0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan(u) \Big|_0^R$$

Ce qu'on peut simplifier en :

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan(R)}_{\rightarrow -\frac{\pi}{2}} \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\arctan(R)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} - 0 \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

Chapitre 12

Révision

- Sujets étudiés**
1. Nombres réels (infimums, supréums) et nombres complexes.
 2. Suites numériques (a_n) .
 3. Séries numériques $\sum a_n$.
 4. Fonctions réelles.
 5. Limites de fonctions.
 6. Dérivées de fonctions.
 7. Développements limités.
 8. Séries entière $\sum a_n(x - x_0)^n$, séries de Taylor.
 9. Intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$.
 10. Intégrales généralisées.

12.1 Liens entre les limites de suites et les limites de fonctions

Caractérisation des limites à partir des suites Par la caractérisation des limites à partir des suites, on peut facilement trouver une limite de suite à partir d'une limite de fonction.

Exemple 1

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$$

Cependant, il existe des fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \ell$, mais :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ n'existe pas}$$

Ceci arrive quand deux suites qui tendent vers 0^+ sont telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Exemple 2

Voici un autre exemple :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$$

De la même manière, on peut trouver des fonctions pour lesquelles cela ne marche pas dans l'autre direction.

Exemple 1

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Prenons $x = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log\left((1 + x^2)^{\frac{2}{x}}\right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log(1 + x^2)}{x \sin(x)}$$

On peut utiliser leur développement limité :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)}^{\rightarrow 0}}{x^2 \underbrace{\left(1 - \frac{x}{6} + x\varepsilon(x)\right)}_{\rightarrow 0}} = 2$$

Ainsi, par la propriété :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = 2$$

Exemple 2

Nous voulons savoir si la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Essayons de la comparer avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^4\right)}{x^\alpha} \stackrel{\alpha=2}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^4}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que, par la caractérisation des limites à partir des suites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, par la définition de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$:

$$\frac{1}{4} \leq \left| \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq \frac{3}{4} \implies \frac{1}{4} \frac{1}{n^2} \leq 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{3}{4} \frac{1}{n^2}$$

Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ont donc la même nature (par comparaison). De plus, on sait que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \iff p > 1$$

Ainsi, nos deux séries convergent.

Notez que nous avons dérivé et utilisé le même critère que celui que nous avons utilisé pour les intégrales généralisées.

12.2 Lien entre les séries numériques et les intégrales généralisées

Proposition

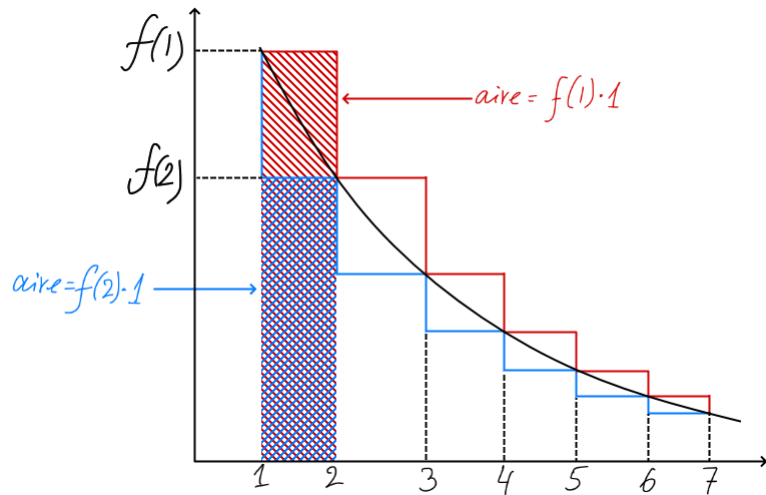
Soit $f \geq 0$ une fonction continue et strictement décroissante pour tout $x \geq a$ pour un certain $a \geq 1$.

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

En d'autres mots, les deux convergent, ou les deux divergent.

Preuve



En regardant ce dessin, on peut voir que :

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \text{ est l'aire bleue}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ est l'aire rouge}$$

On voit donc l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Ainsi, nous savons donc bien que cette série et intégrale sont de même nature.

Exemple 1

Nous voulons savoir si la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Ceci est difficile, on pourrait utiliser le critère de condensation, mais il n'est pas facile à démontrer non plus. Cependant, par notre proposition ci-dessus, on sait que la convergence de de cette série est équivalente à la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Or, c'est intégrale est facile à calculer. On peut voir qu'elle converge si et seulement si $p > 1$.

Exemple 2

Nous voulons savoir pour quels c la série suivante converge :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^c}$$

En utilisant notre proposition ci-dessus, on sait que la convergence de cette série est équivalente à la convergence de :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^c}$$

Prenons le changement de variable $\log(x) = u$:

$$\int_{\log(2)}^{\infty} \frac{du}{u^c}$$

Qui converge si et seulement si $c > 1$. Ainsi, par notre proposition :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^c} \text{ converge } \iff c > 1$$

12.3 Lien entre les fonctions dérivables et les séries entières

Rappel

On sait que les trois séries entières suivantes ont le même rayon de convergence r :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Si $r > 0$, on peut prendre $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Alors :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

où $F'(x) = f(x)$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et $F(x_0) = 0$.

Exemple 1

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

En utilisant d'Alembert, on peut voir que notre série converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Nous voulons trouver :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Pour commencer, on sait que :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \implies f(x) = \sin(x) - x$$

Ainsi, on peut calculer notre intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

Nous aurions aussi pu utiliser notre proposition, mais cela aurait été beaucoup plus compliqué.

Exemple 2

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x \log(x), & x > 0 \\ \sin(x)e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Nous voulons savoir si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue en $x = 0$, et si elle est dérivable en $x = 0$.

Calculons la limite par la droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log(y)}{y} \stackrel{\text{BL}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{y}}{1} = 0$$

Calculons aussi la limite par la gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\sin(x)}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Ainsi, on a obtenu que notre fonction est continue :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Regardons maintenant si la fonction est dérivable. Calculons la dérivée à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$$

Calculons aussi la dérivée à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\rightarrow 0} = 0$$

On obtient donc que f n'est pas dérivable à droite en $x = 0$, mais que $f'_g(0) = 0$. Ainsi, cette fonction n'est pas dérivable en $x = 0$, mais elle est continue en ce point.

12.4 Croissance relative des fonctions

Calcul de limites

Limite 1

Soit $\alpha > 0$, nous voulons calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^k} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x (\log a)}$$

Ainsi, en appliquant Bernoulli-L'Hospital k fois :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{\underbrace{a^x (\log a)^k}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{\substack{0 \text{ ou constant} \\ \leq 0}}{=} 0$$

Concrètement, cela veut dire que a^k croît plus rapidement que x^α .

*Limite 2*Soit $\alpha > 0$, calculons maintenant aussi la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

*Limite 3*Soit $\alpha > 0$, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log(x) \stackrel{y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^\alpha} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} \stackrel{(2)}{=} 0$$

Hiérarchie de croissance de fonctionsSoit $a > 1$, $\alpha > 0$, comme on a vu dans le paragraphe ci-dessus :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$$

Introduisons le symbole $\succ$, qui veut dire “croît plus vite”. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$x^{\frac{\alpha}{k}} \succ \log(x) \implies x^\alpha \succ (\log(x))^k$$

On a donc trouvé que, avec $\alpha > 0$, $k > 0$:

$$a^x \succ x^\alpha, \quad x^\alpha \succ (\log(x))^k$$

Avec des suites*Limite 1*

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$$

Utilisons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0, \quad \forall a$$

On a donc trouvé que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Limite 2

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Utilisons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+1)^n} \frac{n^n}{n+1}$$

Ainsi, c'est égal à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

On a donc trouvé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Résumé

On a donc trouvé :

$$n^n \succ n! \succ a^n \sim a^x \succ x^p \sim n^p > (\log n)^q \sim (\log x)^q$$

où $\sim$ veut dire que les deux fonctions croient à la même vitesse.

12.5 Classes de régularité des fonctions

Classes de régularité des fonctions

Nous pouvons dessiner la liste suivante ; un point implique le suivant :

Analytique	$f(x)$ est égale à sa série de Taylor sur I (un intervalle ouvert).
Infiniment dérivable (ou lisse)	$f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.
n fois continûment dérivable	$f \in C^n(I, \mathbb{R})$, où $n \geq 2$.
n fois dérivable	$f^{(n)}$ existe sur I .
Dérivable	$f'(x)$ existe sur I .
Continue	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in I$.
Intégrable sur $[a, b] \subset I$	$\int_a^b f(x)dx$ existe (y compris les intégrales généralisées).

Pour les fonctions dérivables, nous avons le théorème des accroissements finis (TAF). C'est à dire que $\exists t \in]x, y[\subset I$ tel que :

$$f'(t) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Pour les fonctions continues, nous avons le théorème de la valeur intermédiaire (TVI), c'est à dire que, avec $[a, b] \subset I$:

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$$

Pour les fonctions continues, il y a aussi le théorème de la moyenne. Celui-ci dit que $\exists c \in [a, b] \subset I$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

12.6 Préparation à l'examen

Sujets

1. Nombre réels, infimums et supremums.
2. Nombres complexes.
3. Méthodes de récurrence.
4. Limites des suites (y compris les suites définies par récurrence ; ainsi que les limsup et les liminf).
5. Séries numériques (critères de convergence).
6. Limites de fonctions (par définition, à partir des suites, avec Bernoulli-L'Hospital ou les développements limités).
7. Continuité, prolongement par continuité, limites à gauche et à droite.
8. Théorème des valeurs intermédiaires.
9. Dérivée d'une fonction, fonction différentiable à gauche et à droite.
10. Théorème des accroissements finis, propriétés des fonctions différentiables sur un intervalle.
11. Développements limités.
12. Formule de Taylor et séries de Taylor.
13. Séries entières, rayon et domaine de convergence.
14. Intégrale et primitives, théorème de la moyenne.
15. Changement de variable, intégration par parties, décomposition en fractions simples (fractions partielles).
16. Intégrales généralisées, critères de convergence.

- Comment réviser**
1. Lire et mémoriser les résumés.
 2. Relire les notes de cours (en diagonale, ou, pour les bouts dont on se souvient moins, en détails).
 3. Faire les tests blancs et les séries de questions ouvertes (faire un diagnostic de nos connaissances).
 4. Relire les séries d'exercices.
 5. Faire les examens de 2017, 2018, 2019, 2020 (tous les examens — sauf celui de 2020 — ont aussi une partie uniquement liée à notre section qui ne se trouve pas dans les documents qui nous ont été fournis ; il faut donc les faire en moins de 3h puisque cela représente seulement 64 points des 80 totaux).
 6. Relire les résumés.
 7. Faire l'examen de 2019.

*Bon courage !!
et Joyeuses fêtes !!!*



