

Analyse I – Exercices à rendre le 5 décembre aux assistants

Travail collaboratif : une seule copie à rendre par salle

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

- i) Montrez, en utilisant un ou des résultats du cours, que l'équation $f''(x) = 0$ a au moins deux solutions sur $]0, 1[$.
- ii) Donnez un exemple explicite d'une fonction f satisfaisant les propriétés ci-dessus où l'équation $f''(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0, 1[$.

Exercice 4.

Soit la fonction $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Soient $p_i(x)$, $i = 0, \dots, 3$ les polynômes de Taylor d'ordre 1 de f , en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$, respectivement et $P(x)$ la fonction définie par morceaux :

$$P(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ p_1(x) & x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ p_2(x) & x \in [1, \frac{3}{2}[\\ p_3(x) & x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

- 1) Donner les polynômes $p_i(x)$, $i = 0, \dots, 3$.
- 2) La fonction P est-elle continue sur $[0, 2]$? Si non, trouver les points de discontinuité de P .
- 3) Démontrer que $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^2}{2}$ pour tout $x \in [0, 2]$.