

Analyse I – Exercices à rendre

Exercice 1.

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$.

Solution

On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$ suivante est vraie:

$$\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2.$$

L'initiation: Soit $n = 0$. On a bien

$$\sum_{j=1}^1 j 2^j = 1 \cdot 2^1 = 0 + 2.$$

L'hérédité:

Supposons que $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$ est vrai pour n , et montrons le pour $n + 1$ (c'est-à-dire qu'on veut montrer que $\sum_{j=1}^{n+2} j 2^j = (n + 1) 2^{n+3} + 2$).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+2} j 2^j &= \sum_{j=1}^{n+1} j 2^j + (n + 2) 2^{n+2} \\ &= n 2^{n+2} + 2 + n 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} \\ &= 2^{n+2} (n + n + 2) + 2 \\ &= (2n + 2) 2^{n+2} + 2 \\ &= (n + 1) 2^{n+3} + 2, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

(Explications plus détaillées des étapes de calculs: On écrit d'abord la partie gauche de l'égalité avec $n + 1$. On la décompose en deux parties, la somme qu'on connaît grâce à l'hypothèse, $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j$, et le dernier terme, $(n + 2) 2^{n+2}$, qu'on obtient en remplaçant j par $n + 2$. On utilise l'hypothèse de récurrence, $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^j = n 2^{n+2} + 2$, puis on réorganise ensuite les termes pour obtenir $(n + 1) 2^{n+3} + 2$.)

Conclusion: Puisque $P(0)$ est vraie et $P(n)$ implique $P(n + 1)$, par récurrence on obtient que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Donnez un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que

- (1) $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $(a_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée,
- (3) $(a_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Justifiez votre réponse.

Solution

On cherche un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ positive et non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Rappelons d'abord les définitions: Une suite est bornée si il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq a_n \leq M$. Notons que comme $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut poser $m = 0$ et a_n est forcément minorée par m .

Une suite diverge vers ∞ si pour tout $M' > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n > M'$.

Ainsi, comme on cherche une suite (a_n) positive, non-bornée et qui ne tend pas à l'infini, on veut les propriétés suivantes pour a_n :

- i) $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- ii) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $a_n > M$
- iii) il existe $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq n_0$ tel que $a_n < M'$.

Toute suite dont les termes alternent en une sous-suite qui tend vers l'infini et une sous-suite bornée fait l'affaire. Par exemple, la suite

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

- i) la suite (a_n) est positive, car $a_n > 0$ pour tout n .
- ii) la suite (a_n) est non-bornée. Pour tout $M > 0$, on pose $n = 2[M]$. Comme n est pair, on a $a_n = 2[M] + 1 > M$.
- iii) La suite (a_n) ne tend pas vers ∞ . En effet, posons $M = 10$, et soit $n_0 \geq 0$. On cherche $n \geq n_0$ tel que $a_n \leq 10$. Prenons $n = 2n_0 + 1$. Alors n est impair et $n > n_0$, et on a $a_n = 1 < 10$.

