



**EPFL**

Ens: A. Lachowska  
Analyse I - (n/a)  
11 janvier 2021  
3 heures

n/a

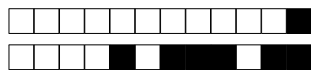
n/a

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages (les dernières pouvant être vides), et 34 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

| Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren                                                                                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|       |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |

**Partie commune, 23 questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Pour toute fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  qui admet en  $x = 0$  un point de minimum local, on a :

☐  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) \neq 0$

☐  $f'(0) \neq 0$  et  $f''(0) \neq 0$

☐  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) \geq 0$

☐  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) \leq 0$

**Question 2 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Alors :

☐  $f$  est dérivable en  $x = 0$  et continue en  $x = 1$

☐  $f$  est dérivable à gauche en  $x = 0$  et dérivable en  $x = 1$

☐  $f$  est continue en  $x = 0$  et dérivable en  $x = 1$

☐  $f$  est dérivable à droite en  $x = 0$  et dérivable à gauche en  $x = 1$

**Question 3 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^3$ . Soit  $f_1 = f$  et, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n = f \circ f_{n-1}$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  :

☐  $f_n(x) = nx^3$

☐  $f_n(x) = x^{(3n)}$

☐  $f_n(x) = (3x)^n$

☐  $f_n(x) = x^{(3^n)}$

**Question 4 :** Soit  $c \in \mathbb{R}$ , et  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \quad a_n = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^c \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Alors :

☐  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} = +\infty$

☐ la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge pour exactement une valeur de  $c$

☐  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = c$

☐ la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  diverge quelle que soit la valeur de  $c$



**Question 5 :** Soit  $f: ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\text{Arctg}(x^2)}{x \sin(x)}$ . Alors :

- ☐  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = 0$ .  
☐  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = 1$ .  
☐  $f$  admet un prolongement par continuité en  $x = 0$ , noté  $\hat{f}$ , et  $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$ .  
☐  $f$  n'admet pas de prolongement par continuité en  $x = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

**Question 6 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 \sin(x^2)$ , et  $I \subset \mathbb{R}$  son ensemble image,

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors :

- ☐  $I = [0, +\infty[$       ☐  $I = [0, 1]$       ☐  $I = \mathbb{R}$       ☐  $I = [-1, 1]$

**Question 7 :** Soit  $A$  l'ensemble défini par  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \text{Arctg}(\frac{1}{x}) < \frac{\pi}{4}\}$ . Alors :

- ☐  $A = ]0, 1[$       ☐  $A$  n'est pas borné  
☐  $A = ]1, \frac{\pi}{2}[$       ☐  $\inf A = \frac{\pi}{2}$

**Question 8 :** Soit la série avec paramètre  $b \in \mathbb{R}$  définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors  $s$  converge pour tout :

- ☐  $b \leq 1$       ☐  $b \in ]-1, 1[$       ☐  $b < 1$       ☐  $b \in ]-1, 1]$

**Question 9 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en  $x = 0$ . Alors :

- ☐  $f(-3) = \frac{3}{8}$       ☐  $f(-3) = -\frac{3}{8}$       ☐  $f(-3) = \frac{7}{8}$       ☐  $f(-3) = \frac{1}{4}$

**Question 10 :** Parmi les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{Arctg}(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

lesquelles sont continues en  $x = 0$ ?

- ☐  $f$  et  $g$       ☐ ni  $f$ , ni  $g$       ☐  $g$ , mais pas  $f$       ☐  $f$ , mais pas  $g$



**Question 11 :** L'intégrale  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx$  vaut

☐  $\frac{3\pi}{2}$

☐  $-\pi$

☐  $2\pi$

☐  $0$

**Question 12 :** Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 (|z| - 2) = 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}.$$

Alors :

☐  $A \cap B$  contient deux points

☐  $A \cap B$  contient exactement un point

☐  $A \cap B$  contient tous les points d'une droite

☐  $A \cap B$  est l'ensemble vide

**Question 13 :** La dérivée de la fonction  $f(x) = (1 + x^2)^{1+x^2}$  au point  $x = 1$  est égale à :

☐  $8(\log(2) + 1)$

☐  $8$

☐  $4$

☐  $4(\log(2) + 1)$

**Question 14 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $a_n = \frac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$ . Alors :

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

**Question 15 :** Soit le nombre complexe  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Alors :

☐  $z^{14} \in \mathbb{R}$

☐  $\operatorname{Re}(z^8) > 0$

☐  $|z^6| > 73$

☐  $\operatorname{Im}(z^{11}) < 0$

**Question 16 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Alors :

☐  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$  converge, mais  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , mais  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge

☐  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, mais pas absolument

☐  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolument

**Question 17 :** Pour toute fonction  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[0, 4]$  et dérivable sur  $]0, 4[$ , qui satisfait  $f'(x) \geq 2$  pour tout  $x \in ]0, 4[$ , on a :

☐  $0 \leq f(3) - f(2) \leq 1$

☐  $f(4) - f(1) \leq 4$

☐  $f(4) - f(0) \leq 1$

☐  $f(2) - f(0) \geq 4$



**Question 18 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \sin(\sin(x))$ , et  $x_0 = 0$ . Alors le développement limité d'ordre cinq de  $f$  autour de  $x_0$  est donné par :

☐  $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐  $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐  $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

☐  $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

**Question 19 :** Soit  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(t) = \frac{1}{4+3t}$ , et  $t_0 = 0$ . Alors le développement limité d'ordre deux de  $f$  autour de  $t_0$  est donné par :

☐  $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{32}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐  $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}t - \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐  $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{64}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

☐  $f(t) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}t + \frac{9}{128}t^2 + t^2\varepsilon(t)$

**Question 20 :** L'intégrale généralisée  $\int_1^{2^-} \frac{x+1}{\sqrt{2-x}} dx$

☐ converge et vaut  $\frac{8}{3}$

☐ converge et vaut 4

☐ converge et vaut  $\frac{16}{3}$

☐ diverge

**Question 21 :** L'intervalle de convergence  $I$  de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x+1)^n$  est donné par :

☐  $I = ]-2, 0[$

☐  $I = [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$

☐  $I = ]-1, 1[$

☐  $I = \mathbb{R}$

**Question 22 :** L'intégrale  $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$  vaut

☐  $3(2\sqrt{2}-1)$

☐  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

☐  $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

☐  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

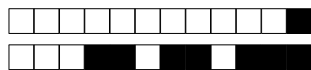
**Question 23 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$ . Alors :

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

**Partie commune, 11 questions du type Vrai ou Faux**

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 24 :** Soit  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone, non-constante, et dérivable sur  $]0, 1[$ . Alors soit  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , soit  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 25 :** Pour tout  $y \in \mathbb{R}$  donné,  $y \neq 0$ , l'équation  $z^4 = iy$  possède exactement quatre racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 26 :** Soit  $(a_k)_{k \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $a_k \neq 0$ , et telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0$ . Alors la série entière  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Si  $\inf A \in A$  et  $\sup A \in A$ , alors  $A$  est un intervalle fermé.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 28 :** Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions dérivables sur  $] -1, 1[$ , telles que  $g(0) = h(0) = 0$ , et  $h'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$ . Si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$  n'existe pas, alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$  n'existe pas.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 29 :** Soit  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $f(n) > n$ . Alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  converge.

☐ VRAI      ☐ FAUX



**Question 30 :** Si  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , alors elle ne possède aucune sous-suite bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 31 :** Soit une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . S'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 32 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction possédant un développement limité d'ordre deux autour de zéro, donné par  $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$ . Alors le développement limité d'ordre deux de  $g(x) = f(x)^3$  autour de zéro est donné par  $g(x) = a^3 + b^3x + c^3x^2 + x^2\varepsilon(x)$ .

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 33 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites convergentes avec  $b_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Alors la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  existe.

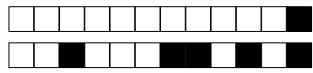
☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 34 :** Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et  $(b_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$b_n = \int_0^{a_n} f(x) \, dx, \quad n \geq 1.$$

Alors  $(b_n)_{n \geq 1}$  est une suite convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX



+1/8/53+