EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
décembre 2024

Analyse I
Résumé: Calcul intégral.

Définitions et résultats.

1. L'intégrale d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle fermé borné $[a,b]$[1] est l'infimum des sommes de Darboux supérieures, ou également le suprémum des sommes de Darboux inférieures par rapport à toutes les subdivisions de l'intervalle $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors on pose

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx; \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a,b[$. Alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$. Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

5. (Théorème de la moyenne).
Soit $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

6. Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue $f(x)$ sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a,b]$, alors $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in [a,b]$, où $C \in \mathbb{R}$.

7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de $f(x)$ sur $[a,b]$.

[1] Dans ce résumé on suppose toujours que l'intervalle $[a,b]$ contient plus qu'un point: $a < b$.

8. (Théorème fondamental du calcul intégral).
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

9. (Intégrale fonction de ses bornes).
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $g, h : I \to [a, b]$ des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I. Alors
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

10. (Propriétés d'intégrale). Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
    (a) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
    (b) Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, et $c \in]a, b[$, alors $\displaystyle 0 \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.
    (c) Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Technique d'intégration.

1. (Changement de variable).
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et telle que $\phi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt, \quad x = \phi(t).$$

2. (Intégration par parties).
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables sur un intervalle ouvert I, et $[a, b] \subset I$. Alors
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

3. Primitives de quelques fonctions.

$f(x)$	$F(x)$
$x^r, \quad r \in \mathbb{R}, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

4. Intégration de quelques fonction rationnelles (Essayez de comprendre la méthode plutôt que mémoriser). Soient $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$.

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$, si $a \neq 0$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{ax+b} + C$, si $a \neq 0$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{cx-d}{(x-a)(x-b)}\, dx = \frac{ac-d}{a-b} \ln |x-a| + \frac{d-bc}{a-b} \ln |x-b| + C$, si $a \neq b$, $c \neq 0$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+px+q}\, dx = \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}} \arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right) + C$, si $p^2 - 4q < 0$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+c^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+c^2| + C$.

Intégrales généralisées.

1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale généralisée

$$\int_a^{b^-} f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt,$$

si la limite existe.

2. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{b} f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f(t)\,dt,$$

si la limite existe.

3. (Critère de comparaison).
Si $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que il existe $c \in]a, b[$ tel que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [c, b[$. Alors
– si $\displaystyle\int_{a}^{b^-} g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{a}^{b^-} f(t)\,dt$ converge;
– si $\displaystyle\int_{a}^{b^-} f(t)\,dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_{a}^{b^-} g(t)\,dt$ diverge.

4.
$$\int_{a}^{b^-} \frac{1}{(b-t)^{\alpha}}\,dt = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{array} \right.$$

5.
$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{diverge}, & \alpha \geq 1 \end{array} \right.$$

6. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to b^-} (b-x)^{\alpha} f(x) = l \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a}^{b^-} f(t)\,dt$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

7. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt := \int_{a^+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b^-} f(t)\,dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne depend pas du choix de $c \in]a, b[$.

8. Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\,dt := \lim_{x \to \infty} \int_{a}^{x} f(t)\,dt,$$

si la limite existe.

9. Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt := \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)\,dt,$$

si la limite existe.

10. Soit $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{a^+}^{\infty} f(t)\, dt := \int_{a^+}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\, dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne depend pas du choix de $c \in]a, \infty[$.

11. Soit $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{b^-} f(t)\, dt := \int_{-\infty}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{b^-} f(t)\, dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne depend pas du choix de $c \in]-\infty, b[$.

12. Soit $f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on définit l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt := \int_{-\infty}^{c} f(t)\, dt + \int_{c}^{\infty} f(t)\, dt,$$

si les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne depend pas du choix de $c \in]-\infty, \infty[$.

13. (Critère de comparaison sur un intervalle non-borné).
Si $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que il existe $c \in]a, \infty[$ et $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \geq c$. Alors
– si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(t)\, dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ converge;
– si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{\infty} g(t)\, dt$ diverge.

14. $$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\beta}}\, dt = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\beta - 1}, & \beta > 1 \\ \text{diverge}, & \beta \leq 1 \end{array} \right.$$

15. Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to \infty} x^{\beta} f(x) = l \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\, dt$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

16. (Critère de convergence pour les séries numériques).
Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et supposons qu'il existe $a \geq 1$ tel que $f(x)$ est positive et strictement décroissante pour tout $x \geq a$. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\, dt$ et la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergent ou divergent en même temps.
En particulière, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si et seulement si $p > 1$.