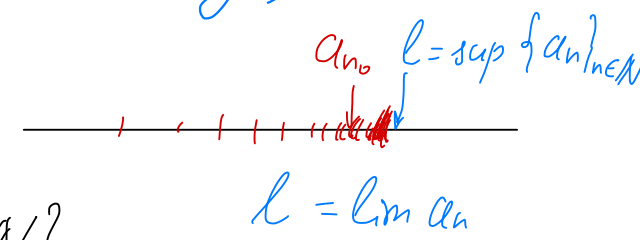


Théorème: Convergence des suites monotones.

Toute suite croissante qui est majorée converge vers son supremum.
décroissante minorée infimum

Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$ (diverge)
décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$ (diverge)

Notation: $(a_n) \uparrow \Leftrightarrow (a_n)$ est croissante
 $(b_n) \downarrow \Leftrightarrow (b_n)$ est décroissante



Dém: Soit $(a_n) \uparrow$ et majorée. Alors $\exists l = \sup \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: 0 < l - a_{n_0} \leq \varepsilon$. Puisque $(a_n) \uparrow \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0}$
par déf de sup

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad 0 < l - a_n \leq \varepsilon \Rightarrow |l - a_n| \leq \varepsilon \xRightarrow{\text{def de lim}} \lim a_n = l$

Soit $(a_n) \uparrow$ pas majorée $\Rightarrow \forall A > 0 \exists a_{n_0} \geq A$, $(a_n) \uparrow \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} \geq A \xRightarrow[\text{de lim} = \infty]{\text{def}} \lim a_n = +\infty$, (a_n) diverge

Le cas de $(a_n) \downarrow$ est similaire.



Le nombre e .

$$y_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Proposition Soit $(x_n) : x_0 = 1, x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \forall n \geq 1$; $(y_n) : y_0 = 1, y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \forall n \geq 1$

Alors (1) $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $y_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $(y_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(4) $(x_n) \uparrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \leq 3 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l' \leq 3.$

en fait, $l = l' = e$.

Dém: (1) $x_0 \leq y_0$; $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow x_n = 1 + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = y_n \quad \forall n \geq 1$$

(2) $y_n \leq 3$: par récurrence : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$ initialisation: $k=1 \Rightarrow \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}} = 1$ Vrai

hérédité : supposons que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ Considérons $\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} \Rightarrow$ par récurrence

rappel: $(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \forall x \neq 1$. Soit $x = \frac{1}{2}$

on a: $y_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow y_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{1 + x + \dots + x^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \quad \forall n \geq 1$$

$$(3) y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = y_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow (y_n) \uparrow$$

-81-

$$(4) (x_n) \uparrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{Moyenne géométrique} \leq \text{moyenne arithmétique}$$

$$\text{Soient } a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right). \text{ Alors } \sqrt[n+1]{a_0 a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} \Rightarrow \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \square$$



Déf

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{déf}}{=} e$$

$$e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Remarque: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$ [DZ §3.4.3, 3.4.4]

$$e \approx 2,7182818284590452353\dots$$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$.
2. Soient $x_n = a_p n^p + \dots + a_0$ et $y_n = b_q n^q + \dots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, & \text{si } p < q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \infty, & \text{si } p > q \end{aligned}$$

Cours 7

Cours 8

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$.
4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$.

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Cours 9

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Série 5

Suites définies par récurrence.

Soit $x_0 = a \in \mathbb{R}$, et $x_{n+1} = g(x_n)$ où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Questions: convergence; si la suite converge, trouver la limite.

Proposition (Récurrence linéaire).

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = qa_n + b$, où $q, b \in \mathbb{R}$.

Alors (1) si $|q| < 1 \Rightarrow (a_n)$ converge vers $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-q}$

(2) si $|q| \geq 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge sauf si (a_n) est une suite constante.

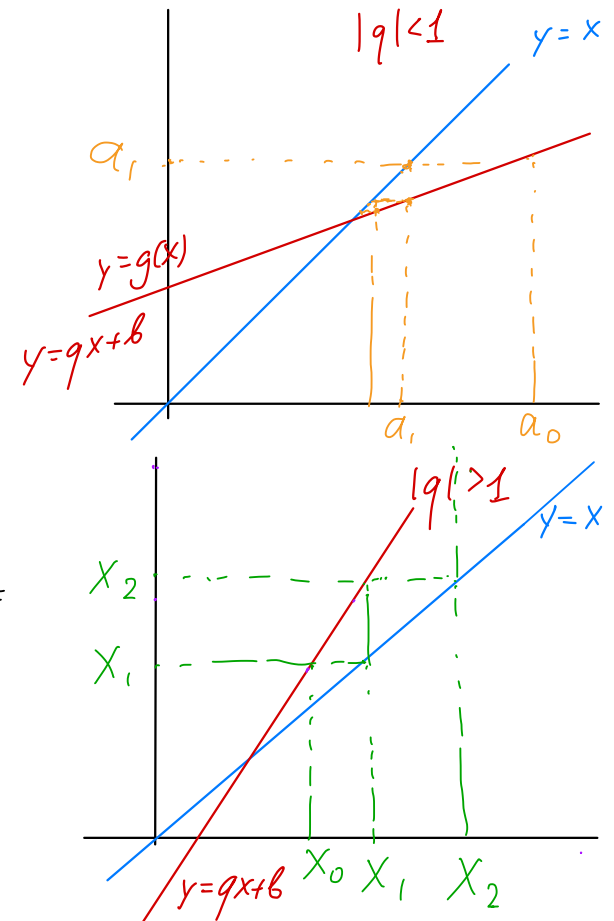
Dém. (1) Supposons (a_n) converge $\Rightarrow$ l'équation pour la limite $l = ql + b \Rightarrow l = \frac{b}{1-q}$, $q \neq 1$

Convergence: Soit $|q| < 1 \forall n \geq 1$ on a:

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_{n+1} - l| &= |qa_n + b - (ql + b)| = |q||a_n - l| = |q|^2 |a_{n-1} - l| = \\ &= |q|^{n+1} |a_0 - l| \Rightarrow 0 \leq |a_{n+1} - l| = |q|^{n+1} |a_0 - l| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - l| = 0$$

$\downarrow n \rightarrow \infty \quad |q| < 1$
0 suite géométrique



$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - l| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - l) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = \frac{b}{1-q}$$

$$a_{n+1} = qa_n + b$$

(2) Si $|q| > 1$; $a_0 \neq \frac{b}{1-q} \Rightarrow$ la suite diverge : Si $a_0 = \frac{b}{1-q} \Rightarrow a_n = \frac{b}{1-q} \forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} - l| = |q|^{n+1} |a_0 - l|, |q| > 1 \text{ suite géométrique avec } r = |q| > 1$$

$\Rightarrow$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente

$|a_{n+1} - l|$ est divergente $\Rightarrow (a_{n+1} - l)$ est divergente $\Rightarrow (a_n)$ est divergente.

(3) $q = 1 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + b$ suite arithmétique ; si $b \neq 0 \Rightarrow$ divergente
 si $b = 0 \Rightarrow a_n = a_0 \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$

(4) $q = -1 \Rightarrow a_{n+1} = -a_n + b \Rightarrow a_1 = -a_0 + b, a_2 = -a_1 + b = -(-a_0 + b) + b = a_0$
 $a_3 = -a_2 + b = -a_0 + b \Rightarrow a_{2k} = a_0, a_{2k+1} = -a_0 + b$

Convergente $\Leftrightarrow a_0 = -a_0 + b \Rightarrow a_0 = \frac{b}{2} \Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ convergente
 Sinon (a_n) est divergente.



Proposition Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ et $g: E \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ telle que

$$(1) \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq g(x) \leq M \quad \forall x \in E$$

$$(2) g \text{ est croissante : } \forall x_1, x_2 \in E : x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

Alors la suite (x_n) $x_{n+1} = g(x_n)$ est bornée et monotone $\Rightarrow$ convergente (Série 6)

Remarque. Si (2) est remplacé par $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$ (g est décroissante)
 $\Rightarrow$ alors (x_n) n'est pas monotone! (mais (x_n) peut être convergente)

Ex non-linéaire $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, $x_0 = 4$

L'équation pour la limite : $l = 5 - \frac{6}{l} \Rightarrow l^2 = 5l - 6 \Rightarrow l^2 - 5l + 6 = (l-2)(l-3) = 0$
 deux candidats : $l=2, l=3$.

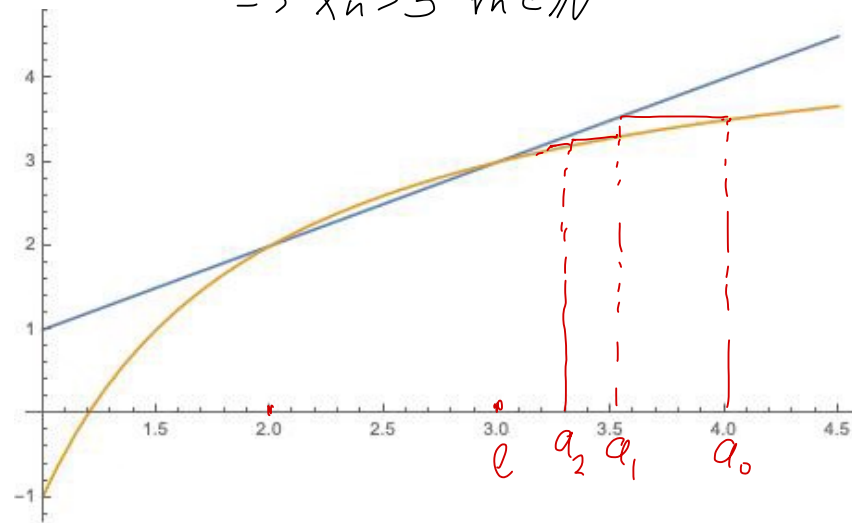
$g(x) = 5 - \frac{6}{x}$ croissante $\Rightarrow (x_n)$ est monotone

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 5 - \frac{6}{4} = \frac{7}{2} < x_0, \quad x_2 = 5 - \frac{6 \cdot 2}{7} = 5 - \frac{12}{7} < \frac{7}{2} \Rightarrow (x_n) \downarrow$$

Minoration: Soit $x > 3 \Rightarrow g(x) = 5 - \frac{6}{x} > 5 - 2 = 3$ Puisque $x_0 = 4 > 3, x_1 > 3, x_2 > 3$
 $\Rightarrow x_n > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (x_n)$ est minorée par 3 et décroissante $\Rightarrow$
 (x_n) est convergente.

Puisque $(x_n) > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$



Quelques méthodes pour étudier les suites définies par récurrence.

(1) Trouver les candidats pour la limite en supposant qu'elle existe.

Si l'équation n'admet pas de solution $\Rightarrow$ la suite diverge.

(2) Étudier la convergence: *(Faire un graphique)*

(a) Récurrence linéaire : $x_{n+1} = qx_n + b \Rightarrow$

$$\text{Si } |q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-q}$$

Si $|q| > 1$ (x_n) diverge sauf si $x_0 = \frac{b}{1-q}$ (suite constante)

Si $|q| = 1$ (x_n) diverge sauf si (x_n) est constante.

(b) Si $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x)$ croissante $\Rightarrow$ la suite est monotone.

Si $x_0 < x_1 \Rightarrow (x_n) \uparrow \Rightarrow$ essayer de démontrer que (x_n) est majorée } $\Rightarrow$ convergente.
 Si $x_0 > x_1 \Rightarrow (x_n) \downarrow$ — " — (x_n) est minorée

(c) Proposition. Si (x_n) et (a_n) deux suites: $0 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 et $\exists \ell \in \mathbb{R} : (x_{n+1} - \ell) = a_n(x_n - \ell)$. Alors (x_n) converge (Serie 5).

Si (b_n) une suite : $0 < b_n < 1$ et $|x_{n+1} - \ell| \leq b_n |x_n - \ell| \Rightarrow$ alors (x_n) converge.

Question 9

La suite (a_n) : $a_0 = -1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n+1}$

A: n'est pas bornée, $\lim a_n \neq \pm \infty$

B: converge vers 0

C: est bornée, mais diverge

D: converge vers $\frac{1}{5}$

E: diverge, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

$$l = \frac{2l}{5l+1} \Rightarrow 5l^2 + l = 2l$$

$$5l^2 - l = l(5l - 1) = 0$$

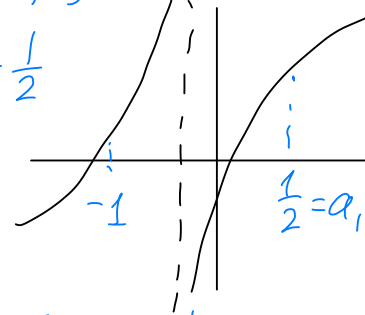
$$l = 0, l = \frac{1}{5}$$

$$g(x) = \frac{2x}{5x+1} = \frac{2}{5} \frac{5x+1-1}{5x+1} = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{5x+1}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) \uparrow \text{ sur }]-\infty, -\frac{1}{5}[\text{ et }]-\frac{1}{5}, \infty[$$

$$a_0 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{5 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{7} < \frac{1}{2}$$



$$a_n > 0, n \geq 1 \Rightarrow (a_n) \downarrow$$

$$(a_n) \text{ est minorée par } \frac{1}{5} : -\frac{1}{5}$$

$$\text{Si } a_n > \frac{1}{5} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{5a_n+1}\right) > \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ par récurrence

$$a_n > \frac{1}{5} \quad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow (a_n)$ converge,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5}$$

