

Rappel: Théorème des deux gendarmes.

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites, telles que

$$\left. \begin{array}{l} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \\ (2) \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k, a_n \leq b_n \leq c_n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$



l

Ex 1. Soit $a_0 = 1, a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0 \forall n \geq 1$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Dém: (1) Soit $a = 1 \Rightarrow a_n = 1 \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(2) Soit $a > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{x^n - 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} \quad \text{Soit } x = \sqrt[n]{a} > 1 \quad (a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1)$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a - 1}{\underbrace{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}} + \dots + a^{\frac{1}{n}} + 1}_{> n}} < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(3) Soit $0 < a < 1$. Soit $b = \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$$



Ex 2. Suite géométrique $a_n = a_0 r^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$

Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= 0 \quad |r| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n &= a_0, \quad r = 1 \\ a_n = a_0 r^n &\text{ diverge, } |r| > 1 \text{ ou } r = -1. \end{aligned}$$

Notation:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0 \leq k \leq n; 0! = 1$$

Ex:

$$\begin{aligned} (1+x)^3 &= \binom{3}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3 \\ &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Dém: (1) Soit $r > 1 \Rightarrow r = 1+x$, $x > 0$

$$r^n = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots \quad \binom{n}{n}x^n \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx \quad \forall n \geq 1$$

$$\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N} : (1+nx) > M \quad (\text{Archimède})$$

$$\Rightarrow |a_0 r^n| = |a_0 (1+x)^n| \geq |a_0| (1+nx) > |a_0| \cdot M \Rightarrow \text{la suite n'est pas bornée} \Rightarrow \text{divergente}$$

(2) Soit $0 < r < 1$. Soit $q = \frac{1}{r} > 1 \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : q^n > M \quad \forall n \geq n_0$

$$\text{Pour } \varepsilon > 0, \text{ on choisit } M = \frac{|a_0|}{\varepsilon} \Rightarrow q^n > \frac{|a_0|}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{q^n} = r^n < \frac{\varepsilon}{|a_0|} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |a_0 r^n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \text{par la déf de la limite} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0.$$

(3) $r = 1 \Rightarrow a_0 r^n = a_0 \quad \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = a_0$

(4) Exercice: $r < 0$. Astuce: Si $|r| > 1 \Rightarrow$ par (1) $|a_0 r^n|$ n'est pas bornée.

$$\text{Si } -1 < r < 0 \Rightarrow \text{Soit } q = -r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}} \underbrace{a_0 q^n}_{\rightarrow 0} = 0 \quad (\text{à voir plus tard})$$



Ex. $a_n = (-3)^{-3n} = ((-3)^{-3})^n = ((-1)^{-3} \cdot 3^{-3})^n = \left(-1 \cdot \frac{1}{27}\right)^n = \left(-\frac{1}{27}\right)^n$

$\Rightarrow r = -\frac{1}{27}, \quad |r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^{-3n} = 0$

Ex. $b_n = \sqrt{\frac{4^{n+2}}{3^{n+3}}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 4^n}{27 \cdot 3^n}} = \frac{4}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{4^n}{3^n}} = \frac{4}{\sqrt{27}} \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{4}{3}} > 1 \Rightarrow \text{divergente.}$

Remarques. (1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$

Exercice: $||x_n| - |l|| \leq |x_n - l|$ voir [DZ §1.4.4]

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : |x_n| - 0 \leq \varepsilon \Rightarrow |x_n - 0| \leq \varepsilon \stackrel{(\text{def})}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$)

(2^a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = l \neq 0 \not\Rightarrow$ convergence de (x_n) Ex: $(-1)^n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$

(3) Si (a_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

Dém: $\underset{\text{bornée}}{|a_n|} < M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq |a_n b_n| \leq M |b_n|$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$
 $0 \quad \quad \quad 0$
 $\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0 \Rightarrow$ Par (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

Théorème Critère de D'Alembert

Soit (a_n) une suite telle que $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \geq 0$

Alors Si $\rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Si $\rho > 1 \Rightarrow (a_n)$ diverge.

Dém: Soit $\rho < 1$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho + \epsilon < 1$

Soit $m > n_0 \Rightarrow$

$$\underbrace{\left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right|}_{\leq \rho + \epsilon} \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \right|}_{\leq \rho + \epsilon} \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\leq \rho + \epsilon} \leq (\rho + \epsilon)^{m-n_0}$$

$\approx \left| \frac{a_m}{a_{n_0}} \right|$

choix de $\epsilon > 0$

$\Rightarrow 0 \leq |a_m| \leq |a_{n_0}| (\rho + \epsilon)^{m-n_0} \quad \forall m > n_0$

$\downarrow$
0

$\downarrow$ $m \rightarrow \infty$ suite géométrique $\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho + \epsilon)^{m-n_0} |a_{n_0}| = 0$ puisque $0 < (\rho + \epsilon) < 1$.

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes $\lim_{m \rightarrow \infty} |a_m| = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$

L'autre cas $\rho > 1$: Exercice (Voir DZ § 3.3.14)



Remarque. Si $\rho = 1 \Rightarrow$ pas d'information sur la convergence de (a_n) .

Ex. $a_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 = \rho$ et (a_n) diverge

$b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 = \rho$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Ex Critère de D'Alembert

-74-

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n} \quad \text{D'Alembert: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{1}{5} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n} = 0 \text{ Par D'Alembert}$$

Cours 7 $\rightarrow$ 1

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} \quad \text{D'Alembert: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{5}{\cancel{5^{n+1}}}}{\underset{(n+1)}{\cancel{(n+1)!}}} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 = \rho < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0 \text{ par D'Alembert}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0 \quad \forall S \in \mathbb{R}$$

Calcul des limites.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout $p > 0$. ✓

2. Soient $x_n = a_p n^p + \dots + a_0$ et $y_n = b^q n^q + \dots + b_0$ deux suite polynômiales telles que $a_p > 0, b_q > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= 0, & \text{si } p < q & \quad \checkmark \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q & \quad \checkmark \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \infty, & \text{si } p > q & \end{aligned}$$

 $p > q \Rightarrow \text{diverge}$  $\leftarrow \text{cours 8}$

Cours 7

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pour tout $a > 0$. ✓

4. La suite géométrique $(a_0 r^n)$, $a_0, r \in \mathbb{R}$, converge vers la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0 r^n = 0$, si $|r| < 1$, et diverge si $|r| > 1$. ✓

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ pour tout $p > 0$. ✓

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$

Série 5

Cours 8

Limites infinies.

-76-

Déf On dit que (a_n) tend vers $+\infty$ si: $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, a_n \geq A$
 $(b_n) \quad -\infty \quad b_n \leq -A$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Attention: les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes.

Propriétés (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$ et (b_n) est bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \pm \infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ et $a_n \geq b_n$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
 $-\infty$ et $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ "règle d'un gendarme"

(4) (a_n) bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dém: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \Rightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow b_n \geq M \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{M} \Rightarrow$ Soit $M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{b_n} \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0, (a_n) \text{ bornée}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \Rightarrow$ alors (a_n) diverge
(extension du critère de D'Alembert).

Formes indéterminées

(1) $\infty - \infty$

-77-

Ex. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\sqrt{n+2}}_{\rightarrow \infty}} = 0.$$

$$b_n = n^2 - n \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n}_{\rightarrow \infty} \underbrace{(n-1)}_{\rightarrow \infty} = \infty$$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ Ex: quotient des deux polynômes (cours 7)

(3) $\frac{0}{0}$ Ex: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$

(4) $0 \cdot \infty$ Ex: $\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow \infty} = \frac{1}{(n+1)} \rightarrow 0$; $\underbrace{\frac{1}{(n+1)}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(n+1)^2}_{\rightarrow \infty} = (n+1) \rightarrow \infty$ diverge

$$\underbrace{\frac{1 + \cos n}{1 + n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\rightarrow \infty} = 1 + \cos n \text{ diverge.}$$

Remarque. $(\cos n)$ et $(\sin n)$ sont des suites divergentes.

Dém: Supposons que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = l \in \mathbb{R}$.

$3 < \pi < 4$

L'ensemble $\{\cos n, \cos(n+1), \cos(n+2), \cos(n+3), \cos(n+4)\}$ contient des valeurs positives et négatives.
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ la limite, si elle existe, est égale à 0.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n) = l = 0 \Rightarrow$ le même argument marche pour $(\sin n)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n) = l = 0$ [Aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n+1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\underbrace{\cos n}_{\rightarrow 0} \cos 1 + \sin n \sin 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$

$\Rightarrow \lim (\cos^2 n) = 0$ et $\lim (\sin^2 n) = 0$

mais $\lim (\underbrace{\cos^2 n}_0 + \underbrace{\sin^2 n}_0) = \lim 1 = 1$ contradiction.

$\Rightarrow (\sin n)$ et $(\cos n)$ sont divergentes



Question 8

La limite de la suite

$$a_n = \left(n \sin \frac{n\pi}{6} - n \cos \frac{n\pi}{6}\right) \left(n \sin \frac{n\pi}{6} + n \cos \frac{n\pi}{6}\right)$$

A est $\sin^2 \frac{\pi}{6}$

B n'existe pas

C est 0

D est $\cos^2 \frac{\pi}{6}$

$$a_n = n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{6} - n^2 \cos^2 \frac{n\pi}{6} = -n^2 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{6} - \sin^2 \frac{n\pi}{6} \right) =$$

$$= -n^2 \cos \frac{n\pi}{3} \quad \left(\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \right)$$

$$-n^2 \left(\underbrace{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1}_{\text{change de signe}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \right)$$

(a_n) n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente
change de signe $\Rightarrow$ lim n'existe pas.

$\Rightarrow B$