

Rappel: Limite d'une suite.

Déf Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \stackrel{\text{dit}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ex. Soit $p \in \mathbb{Q}, p > 0$. Considérons la suite $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{n^p}, n \geq 1$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad |a_n - l| \leq \varepsilon$$

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n^p \stackrel{p>0}{\iff} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \leq n \quad (\text{voir Exercice : Si } 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m \text{ et } x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \forall m \in \mathbb{N}^*)$$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas borné $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \text{ on a : } n \geq n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n^p \Rightarrow \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \text{par la déf de la limite, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \square$$

Autrement, on peut poser $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rfloor + 1$ et montrer que dans ce cas

$$\forall n \geq n_0 \text{ on a } \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \forall p > 0$$

Exercice $\forall x, y \in \mathbb{R} : 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m \text{ et } x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$ -60-

(1) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R} : 0 < a \leq b \text{ et } 0 < c \leq d$. Alors $bd \geq ac$

$$b - a \geq 0, c \geq 0 \Rightarrow bc - ac \geq 0; d - c \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \Rightarrow db - bc \geq 0 \Rightarrow bd \geq bc \geq ac \Rightarrow bd \geq ac$$

(2) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$ par récurrence: $m=1 \Rightarrow x \leq y$ Vrai.

Supposons $x^n \leq y^n$. Alors ^{par (1)} $x \leq y$ et $x^n \leq y^n \Rightarrow x^{n+1} \leq y^{n+1}$ Vrai

$\Rightarrow$ par récurrence $x^m \leq y^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$ (Aussi si $x \neq y \Rightarrow x^m < y^m$).

(3) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$. Par contraposée: supposons $x^{\frac{1}{m}} > y^{\frac{1}{m}}$.

Alors par (2) $(x^{\frac{1}{m}})^m > (y^{\frac{1}{m}})^m \Leftrightarrow x > y$, contradiction puisque $x \leq y$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$



Proposition (unicité de la limite).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, telle que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des limites de (a_n) . Alors $a = b$.

[DZ, § 3.2.4] Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Inégalité triangulaire.

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

-6/-

Dém: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a: $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$; $y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Alors si } x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \leq |x| + |y| \\ \text{Si } x+y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = -x-y \leq |x| + |y| \end{array} \right\} \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$



Ex. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors a_n est divergente.

Par absurde: Supposons qu'il existe la limite $l \in \mathbb{R}$ de $(-1)^n$.

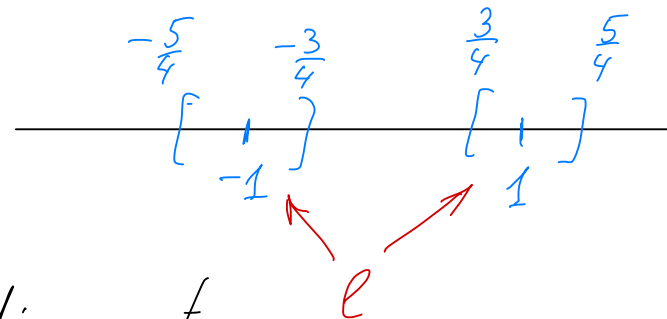
$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \frac{1}{4}$$

$$a_{2k} = 1, a_{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k : 2k \geq n_0 \text{ et } 2k+1 \geq n_0 \text{ on a:}$$

$$|a_{2k} - l| = |1 - l| \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |a_{2k+1} - l| = |-1 - l| \leq \frac{1}{4}$$

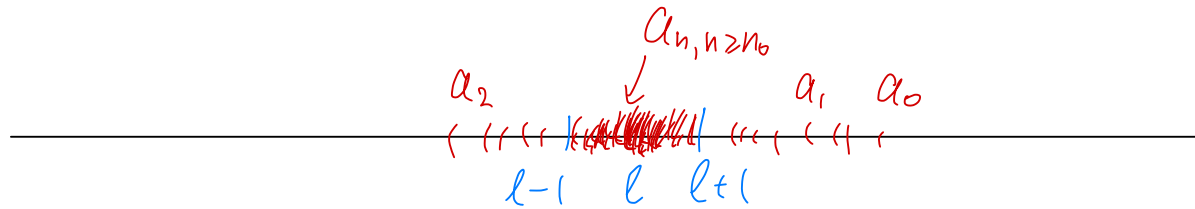
$$2 = \underbrace{|l-1 + (-1-l)|}_{-2} \leq |l-1| + |-1-l| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2} \text{ absurde} \Rightarrow (a_n) = (-1)^n \text{ est divergente.}$$



Proposition Toute suite convergente est bornée.

Dém: Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$
on a $|a_n - l| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$



Soit $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ ensemble fini de nombres réels.

$\Rightarrow \exists \max S$ et $\min S$

$\Rightarrow$ la suite (a_n) est majoré par $\max(\max S, l+1)$
minoré par $\min(\min S, l-1)$ □

La réciproque de la Proposition est fausse : $(-1)^n = a_n$ est bornée
par -1 et 1
mais divergente.

Opérations algébriques sur les limites.

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Alors:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

} voir [DZ §3.3.3]

Remarques (1) Si $(a_n + b_n)$ convergente $\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergent, soit (a_n) et (b_n) divergent : Ex : $a_n = n$, $b_n = -n \Rightarrow a_n + b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si (b_n) converge, $(a_n + b_n)$ converge $\Rightarrow$ alors (a_n) converge

$$a_n = \underbrace{(a_n + b_n)}_{\text{conv}} - \underbrace{b_n}_{\text{conv}} \quad \text{converge par Proposition (1)}$$

(2) Cas particulier : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow$ Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, soit les deux suites (a_n) et (b_n) divergent.

$$a_n = n + \frac{1}{n+1}, \quad b_n = n \quad \Rightarrow \quad a_n - b_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(3) $\forall p \in \mathbb{R}$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} p a_n = p a$.

-64-

Dém: Soit $p > 0$. Soit $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{p} \leq a_n - a \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow -\varepsilon \leq p a_n - p a \leq \varepsilon$
 $\Rightarrow |p a_n - p a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p a_n = p a$

(4) Soit $(a_n \cdot b_n)$ convergente.

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergent : $a_n = \frac{1}{n+1}, b_n = 1 \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) divergent : $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ conv}$

$\Rightarrow$ Soit une converge, l'autre diverge : $a_n = (n+1), b_n = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n+1} \text{ conv.}$

Mais si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow (a_n)$ converge.

$a_n = \frac{(a_n b_n)}{b_n}$ $\leftarrow \text{conv}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b \neq 0 \Rightarrow$ Par Proposition (3), $\Rightarrow (a_n)$ converge

(5) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors la suite $(\frac{1}{a_n})$ est divergente, si elle existe

Dém: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Soit $M > 0$. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon} = M$

$\Rightarrow (\frac{1}{a_n})$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente $\square$

Proposition. Quotient de deux suites polynomiales.

- 65 -

$$X_n = a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_p \neq 0, \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$Y_n = b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad b_q \neq 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X_n}{Y_n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \text{divergente}, & \text{si } p > q \end{cases}$$

Idee:

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p}{n^q} \frac{\left(a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^p} \right)}{\left(b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + \dots + b_0 \frac{1}{n^q} \right)} \rightarrow \begin{cases} \frac{n^p}{n^q} \stackrel{q > p}{=} \frac{1}{n^{q-p} > 0} \rightarrow 0 \\ \frac{n^p}{n^p} \stackrel{q = p}{=} 1 \rightarrow \frac{a_p}{b_q} \\ \frac{n^p}{n^q} \stackrel{p > q}{=} n^{p-q > 0} \text{ divergente pas bornée} \end{cases}$$

Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 1}{6n^2 + 8n + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 + \frac{8}{n} + \frac{10}{n^2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 + 30n^2 + 2n + 1}{5n^6 + 6n^3 + 3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^4}{n^6} \left(-2 + \frac{30}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{\left(5 + \frac{6}{n^3} + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^6} \right)} = 0$$

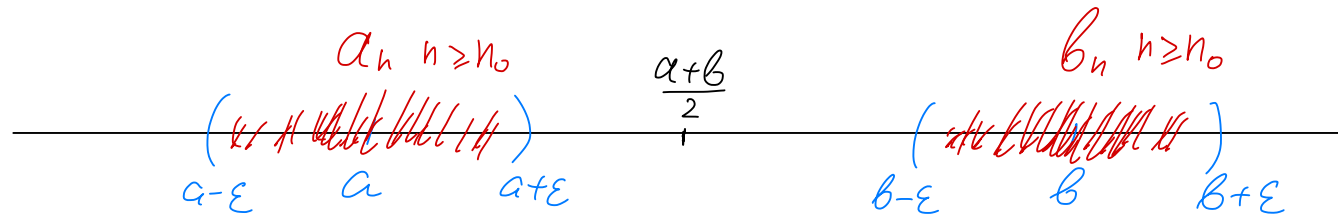
Relation d'ordre.

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Supposons que $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$. Alors $a \geq b$.

Dém: Par absurde. Supposons que $a < b$. Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{4} > 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \text{ et } b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon$$



$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a + \varepsilon < \frac{a+b}{2} < b - \varepsilon \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b_n$$

$$\forall n \geq m_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max(n_0, m_0) \Rightarrow \begin{cases} a_n < b_n \\ a_n \geq b_n \end{cases}$$

contradiction.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$



Théorème de deux gendarmes pour les suites

Soient (a_n) , (b_n) , (c_n) trois suites telles que

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$

(2) $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ on a

$-\varepsilon \leq a_n - l \leq \varepsilon$ et $-\varepsilon \leq c_n - l \leq \varepsilon$

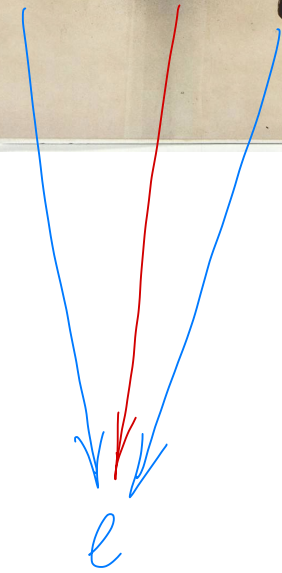
$\forall n \geq k : a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l$

$\forall n \geq \max(k, n_0) : -\varepsilon \leq a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l \leq \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon \leq b_n - l \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, k)$

$\Leftrightarrow |b_n - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, k) \Rightarrow$ par la définition de la limite

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l.$



Exemples : Deux gendarmes.

-68-

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 6n \cos n}{4n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \left(5 + \frac{6 \cos n}{n} \right)}{\cancel{n^2} \left(4 + \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{5}{4}.$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$

$$n \geq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos n \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{n} \leq \frac{6 \cos n}{n} \leq \frac{6}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cos n}{n} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

0 0

par les 2 gendarmes

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 1}}{5n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{3n^2}}}{5n + 2} \stackrel{n > 0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \cancel{n} \sqrt{1 + \frac{1}{3n^2}}}{\cancel{n} (5 + \frac{2}{n})} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$\nearrow 1$

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{3n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{3n^2} + \left(\frac{1}{6n^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{6n^2}$$

$\downarrow$
1

$\downarrow$
1

par les 2 gendarmes

$\downarrow$
1

Question 7. La suite suivante est divergente:

A. $\frac{n \cos(2n+5) - 1}{n^2 + 6n + 1}$

$$\frac{\frac{\cos(2n+5)}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(2n+5)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

B. $\frac{n^3 + 5n - 2}{n^3 \cos(\frac{\pi n}{4}) + n + 1}$

$$\frac{1 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{\cos(\frac{\pi n}{4}) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow 0$$

n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente.

$$\cos(\frac{\pi n}{4}) = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dots \right\}$$

le dénominateur est arbitrairement proche de zéro pour un nombre infini d'éléments de la suite.

C. $\frac{3 + \sin(n^2+1)}{4n^2 + n^2 \cos n}$

$$\frac{1}{n^2} \frac{3 + \sin(n^2+1)}{4 + \cos n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^2} \frac{2}{5} \leq \frac{1}{n^2} \frac{3 + \sin(n^2+1)}{4 + \cos n} \leq \frac{1}{n^2} \frac{4}{3}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

D. $\frac{1}{5n + n \cos(\pi n)}$

$$\frac{1}{n} \frac{1}{5 + \underbrace{\cos(\pi n)}_{= (-1)^n}}$$

$$\frac{1}{n} \frac{1}{6} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{5 + (-1)^n} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{4}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$