Chapitre 2. Suites des nombres réels.

Exemples des suites. Raisonnement par récurrence.

Déf Une suite de nombres réels est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel (pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$)

Notation: (a_n) - suite où $a_n = f(n)$; $(a_n)_{n\geq 0} = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$; $\forall a_i \in \mathbb{R}$
ensemble ordonné

Ex. (1) $a_n = n \quad \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(2) $a_n = \frac{1}{n+1} \quad \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

(3) $a_n = (-1)^n \quad \{1, -1, 1, -1 \dots\}$

(4) $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ Suite de Fibonacci 
définie par récurrence $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$

(5) Suite arithmétique $a_n = a \cdot n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

(6) Suite géométrique $a_n = a \cdot r^n$, $a, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$.

Déf. Une suite est majorée (minorée) s'il existe un nombre M (m) réel $\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n \geq m \ \forall n \in \mathbb{N})$

un majorant — un minorant

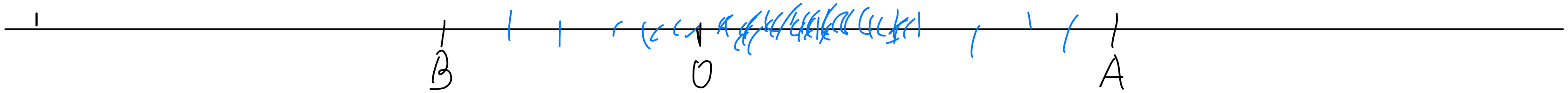
On dit que la suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque. **Déf** $|x| \overset{\text{déf}}{=} x$ si $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$

$|x| \overset{\text{déf}}{=} -x$ si $x < 0$, $x \in \mathbb{R}$

(a_n) est bornée $\iff$ $\exists$ $M \geq 0$ tel que $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Si $B \leq a_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $M = \max(|A|, |B|)$ $\Rightarrow$ $|a_n| \leq M$.



Déf. Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$

Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$

Une suite est dite (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Ex. (1) $a_n = n$ strictement croissante: $a_{n+1} - a_n = n+1-n = 1 > 0$

Elle n'est pas majorée : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré (on a démontré avant)

Elle est minoré par 0.

(2) $a_n = \frac{1}{n+1}$ strictement décroissante : $a_{n+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

bornée : $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $a_n = (-1)^n$ pas monotone, bornée : $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(5) $a_n = a \cdot n + b$; Strictement croissante si $a > 0$, strictement decroissante si $a < 0$

$a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (an+b) = a$.

Archimède

Si $a > 0 \Rightarrow \forall S > 0 \ \forall b \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : an > S - b \iff an + b > S$

$\Rightarrow (a_n)$ n'est pas majorée ; elle est minorée par $b \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si $a < 0 \Rightarrow (a_n)$ n'est pas minorée, elle est majorée par b.

(4) $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$: $f_{n+2} - f_{n+1} = f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (somme des nombres naturels, $f_0 \geq 0, f_1 \geq 0$)

(f_n) n'est pas majorée

$$+\begin{cases} f_{n+2} - f_{n+1} \geq 1 & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f_{n+1} - f_n \geq 1 \\ \vdots \\ f_3 - f_2 \geq 1 \\ f_2 = 1 \end{cases}$$

$$f_{n+2} \geq n+1$$

puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré $\Rightarrow$ la suite (f_n) n'est pas majorée.

Raisonnement par récurrence. Soit $P(n)$ une proposition dependant d'un entier naturel n, telle que (1) Initialisation: $P(n_0)$ est vraie, et (2) Hérédité: Pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Proposition $\underbrace{f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1} = (-1)^{n-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, où (f_n) est la suite de Fibonacci.

Soit $P(n)$ la proposition

(1) L'initialisation: $n = 1$: $f_1^2 - f_2 \cdot f_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^{1-1} = 1$ Vrai.

(2) L'hérédité. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Considérons $P(n+1)$

$$f_{n+1}^2 - f_{n+2} \cdot f_n \overset{?}{=} (-1)^n. \quad f_{n+1}^2 - f_{n+2} \cdot f_n = f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) - (f_n + f_{n+1}) \cdot f_n =$$

$$= \cancel{f_{n+1} f_n} + f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 - \cancel{f_n f_{n+1}} = -\underbrace{(f_n^2 - f_{n+1} f_{n-1})}_{= (-1)^{n-1}} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n.$$

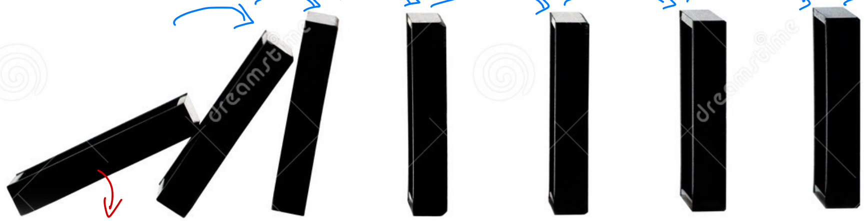
Par récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

$\boxed{//}$

Remarque. Généralisation de la méthode de recurrence: Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} (1) \ P(n_0), P(n_0+1) \ldots P(n_0+k), \ k \text{ fixé sont vraies} \\ (2) \ \{P(n), P(n+1), \ldots P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \ \forall n \geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ est vraie } \forall n \geq n_0$$

Démonstration par récurrence:



l'hérédité

les dominos

$P(n_0)$ l'initialisation

Il est important à demontrer les deux parties de l'argument: l'initialisation et l'hérédité

Contre-exemple 1 Hypothèse : Tout nombre naturel est égal au nombre naturel suivant.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie: $n = n+1$

Alors en ajoutant 1 à l'égalité on obtient $n+1 = n+2 \Rightarrow P(n+1)$ est vraie

Faute: On a oublié l'initialisation, mais $0 \neq 1$ (axiome de $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ L'hypothèse n'a pas été démontrée.

Ex Trouver la somme de n premier nombres naturels impairs.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1+3 = 4$

$S_3 = 1+3+5 = 9$

$S_4 = 1+3+5+7 = 16$

Hypothèse : $\underbrace{S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2}_{P(n)}$.

Dém: par récurrence: (1) Initialisation: déjà démontrée pour $n=1,2,3,4$

(2) Hérédité: Supposons que $S_n = n^2$. Il faut en déduire que $S_{n+1} = (n+1)^2$.

$$S_{n+1} = \underbrace{1 + 3 + \dots + (2n-1)}_{S_n} + (2n+1) = S_n + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \quad \text{Vrai.}$$

$\Rightarrow$ par récurrence, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\blacksquare$

Contre-exemple 2. Hypothèse „Tous les crayons sont de la même couleur" (dans n'importe quel ensemble de $n \geq 1$ crayons).

Dém: (1) Initialisation: $n = 1$

Dans un ensemble d'un seule crayons tous les crayons sont de la même couleur

$\Rightarrow P(1)$

(2) Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On suppose que tout ensemble de n crayons contient seulement des crayons de la même couleur.

Soit $\{c_1\ c_2 \dots c_{n+1}\}$ un ensemble arbitraire de $(n+1)$ crayons

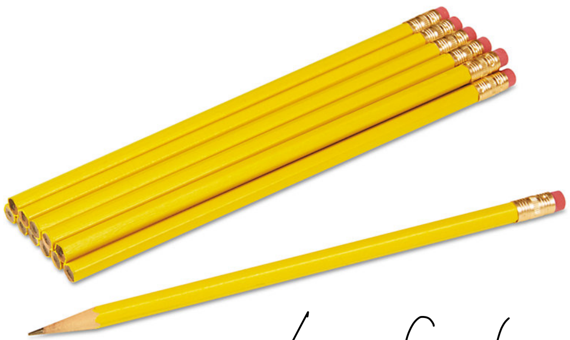
Alors $\{c_1\ c_2 \dots c_n\}$ sont tous de la même couleur

ensembles de n éléments

$\{c_2 \quad \dots \quad c_{n+1}\}$ sont tous de la même couleur (supposition) $\Rightarrow$

$$\{\overbrace{c_1\ \underbrace{c_2 \dots c_n}_{\text{même couleur}}}^{\text{même couleur}}\!\underbrace{\ c_{n+1}}\}$$

$\{c_1\ c_2 \dots c_n\ c_{n+1}\}$ sont de la même couleur. $\Rightarrow P(n+1)$.

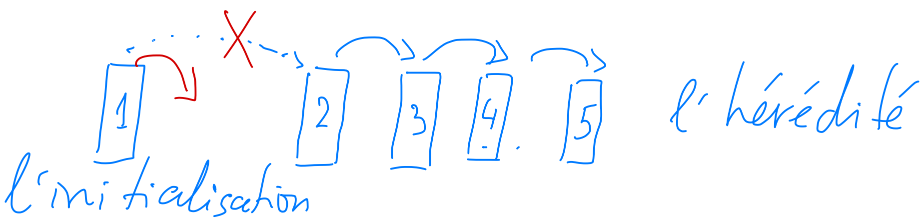


Par récurrence, tous les crayons sont de la même couleur.

" $\boxed{///}$ "

La faute : L'hérédité $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ne marche que pour $n \geq 2$

$P(1) \not\Rightarrow P(2)$ Mais l'initialisation a été vérifiée seulement pour $P(1)$.

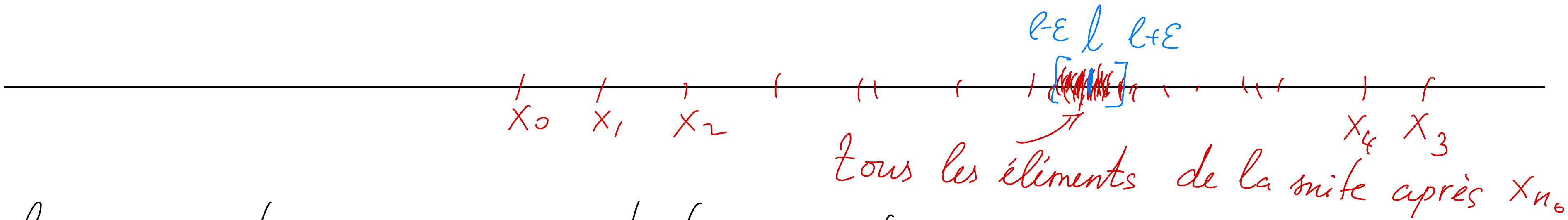


Limites des suites.

Déf. On dit que la suite (x_n) est *convergente* et admet pour *limite* le nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \ell$.

Remarque. $|x_n - \ell| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x_n - \ell \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$



Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les éléments de la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ (après n_0) se trouve dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Déf. Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Ex. La suite (a_n), $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui peut dépendre de ε) tel que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| \leq \varepsilon$

Donc $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{>0} \leq \underbrace{\varepsilon}_{>0} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq \underbrace{\sqrt{n+1}}_{>0} \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

Soit $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor \Rightarrow n_0 + 1 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow n+1 \geq n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ par la définition de la limite $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. $\square$

Autrement: puisque $\mathbb{N}$ n'est pas borné $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \Rightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. $\square$

Question 6.

La suite suivante est divergente:

A: $a_n = (-1)^{(3^n - 2^n)}$ $\quad$ $3^n - 2^n$ impaire, $n \geq 1$ $\quad \{1, -1, -1, -1, -1 \ldots\} \to -1$

B: $b_n = \dfrac{1}{f_n + 2}$ où f_n sont de nombres de Fibonacci $\quad f_n \geq n-1 \Rightarrow \dfrac{1}{f_n+2} \leq \dfrac{1}{n+1}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \dfrac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

C: $c_n = \dfrac{1}{\tan(80\pi n + \frac{\pi}{8})}$ $\quad \underbrace{\tan\left(80\pi n + \frac{\pi}{8}\right) = \tan\frac{\pi}{8} \ \forall n \in \mathbb{N}}_{\text{suite constante}} \Rightarrow \ \to \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}$

D: $d_n = \cos(\pi n - 3\pi)$ $\quad (-1)^n : \ 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ divergente

E: $e_n = \sin(\pi n + 7\pi)$ $\quad \sin(\pi n + 7\pi) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $: \underbrace{\{0, 0, 0 \ldots\}}_{\text{suite constante}} \to 0.$