

-41-

Rappel: $z = a + ib = \underset{\text{cartésienne}}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \underset{\text{polaire trig.}}{\rho} \underset{\text{polaire exp.}}{e^{i\varphi}} \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$
 $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$

Formule de Moivre. $(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ à $2k\pi$ près, $n \in \mathbb{N}^*$
 $k \in \mathbb{Z}$

Ex. $z = 5\sqrt{3} + 5i$. Trouver z^{15}

$$z^{15} = (5\sqrt{3} + 5i)^{15} = [\text{coefficients binomiaux}] - \text{très long}$$

$$\Rightarrow z = 5\sqrt{3} + 5i = 10e^{i\frac{\pi}{6}} \quad |z| = \sqrt{75 + 25} = 10; \arg = \arctan \frac{5}{5\sqrt{3}} =$$

$$\Rightarrow \text{Par le Moivre } z^{15} = (10e^{i\frac{\pi}{6}})^{15} = 10^{15} e^{i\frac{5\pi}{2}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$= 10^{15} e^{\frac{\pi i}{2}} = 10^{15} i \quad \left(\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \hline 1 & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Conjugaison

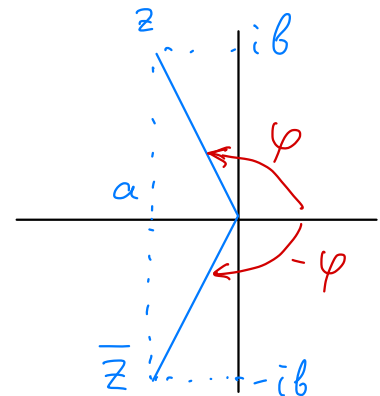
Déf $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors le conjugué de z est $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - ib$

Si $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow \boxed{z\bar{z} = |z|^2} \in \mathbb{R} \quad (z^{-1}z = 1)$

En forme polaire:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \bar{z} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) =$$

$$= \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \Rightarrow \underline{\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}}$$



Propriétés:

(1) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

(4) $|\overline{z}| = |z|$

(5) $z = a + ib, \overline{z} = a - ib$

← en forme cartésienne

← en forme polaire

Exercice:
démontrer

$a =$

$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$b =$

$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

En particulier, si $|z| = 1$

$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$

$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Application: Exprimer $\sin^4 \varphi$ en terme des fonction d'angle multiple

$$\sin^4 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(e^{4i\varphi} - 4e^{3i\varphi}e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi}e^{-2i\varphi} - 4e^{i\varphi}e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \left(e^{4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} + 6 - 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi} \right) = \frac{1}{8} \cos(4\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{3}{8}$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$a = e^{i\varphi} \quad b = e^{-i\varphi}$$

Racines des nombres complexes

Proposition Si $w = se^{i\varphi}$, $w \in \mathbb{C}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Dém: Soit $z = re^{i\vartheta}$, $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Supposons que $z^n = w \xRightarrow{\text{du Moivre}} r^n e^{in\vartheta} = se^{i\varphi}$

$$\Rightarrow r^n = s > 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{s} \text{ et } n\vartheta = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \frac{\varphi}{n} \\ k=n \Rightarrow \frac{\varphi}{n} + 2\pi \end{array} \Rightarrow \text{même solution pour } k=0, k=n$$

$$\Rightarrow \{\vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

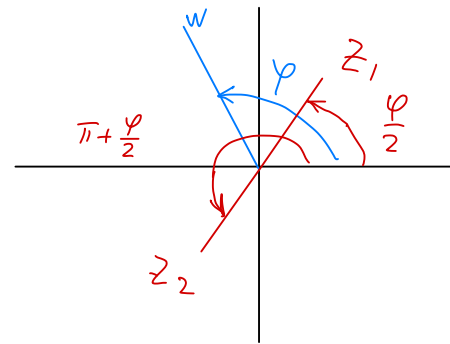


Racines carrées. $z^2 = w = se^{i\varphi}$, $s > 0$ Alors:

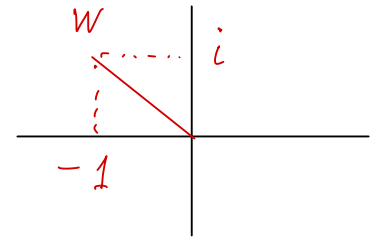
$$\{z = \sqrt{s} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1\} = \{\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}, \sqrt{s} e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}\} = \{\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}, -\sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}\}$$

$\Rightarrow$ il existe 2 racines carrées pour tout $w \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$
 $\pm \sqrt{s} e^{i \frac{\varphi}{2}}$

$$z_1^2 = z_2^2 = w \text{ et } z_1 = -z_2$$



Ex Résoudre $(-1+i) = z^3$, $z \in \mathbb{C}$



Soit $w = -1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (voir cours 4)

$$\Rightarrow \text{Proposition} \Rightarrow \{z : z^3 = w, z \in \mathbb{C}\} = \{\sqrt[3]{\sqrt{2}} e^{i\frac{(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)}{3}}, k=0,1,2\}$$

$$= \{\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}}, k=0,1,2\}$$

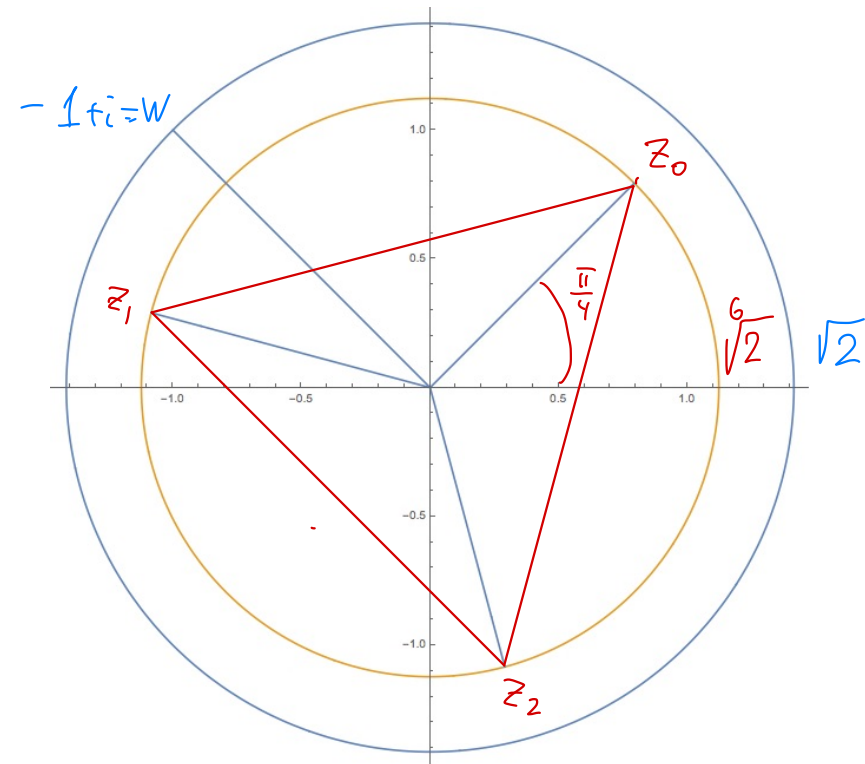
Exercice: Calculer les arguments des 3 racines z_0, z_1, z_2

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Les solutions se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral.



Question 5 Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Alors l'équation $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 = z$ possède

(A) Exactement 1 solution dans $\mathbb{C}^*$

(B) Exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(C) Exactement 5 solutions dans $\mathbb{C}^*$

(D) Un nombre infini de solutions dans $\mathbb{C}^*$

$$\text{Soit } z \neq 0, z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 = \left(\frac{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}{\cancel{\rho} e^{-i\varphi}}\right)^3 = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \left(e^{2i\varphi}\right)^3 = \rho e^{i\varphi}$$

$$\Leftrightarrow e^{6i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = \rho \quad \Leftrightarrow e^{5i\varphi} = \rho \Rightarrow 1 = \rho \text{ (modules)}$$

$$\Rightarrow e^{5i\varphi} = 1 = e^{i0} \Rightarrow \varphi = \frac{0 + 2k\pi}{5}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

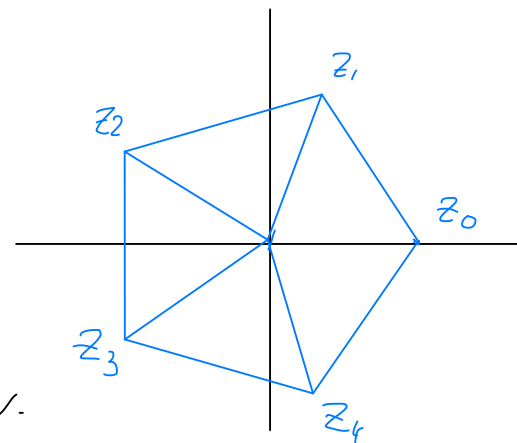
$$\Rightarrow \varphi = \left\{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right\} \Rightarrow z = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$$

$\Rightarrow 5$ solutions.

En général, les racines n -ièmes de $w = re^{i\varphi}$ sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ aux sommets

d'un polygone régulier à n côtés $\left\{ \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right\}_{k=0, \dots, n-1}$

L'orientation du polygone dépend de l'argument φ de w .



Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$.

Quadratique. dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$\Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{racine d'un nombre complexe}$$

$\Rightarrow$ Si $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ il existe une seule solution $z = -\frac{b}{2a}$ à multiplicité 2.

$\Rightarrow$ Si $b^2 - 4ac \neq 0 \Rightarrow$ il existe toujours 2 solutions complexes.

Théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration)

Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$

s'écrit sous la forme $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, où $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
(peut-être avec des répétitions)

$$P(z) = a_n (z - w_1)^{m_1} (z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_p)^{m_p} \text{ où } w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C} \text{ distincts}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n, \quad m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*.$$

On dit que m_i est la multiplicité de la racine w_i .

Remarque: Ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$.

Ex. $(x^2 + 4x + 9)(x^2 + 3) = P(x)$ degré 4 n'a pas de racines réelles.

Exercice: Écrire $P(x)$ dans $\mathbb{C}$ en produit de 4 facteurs linéaires

$$P(x) = (x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)(x + 2 - \sqrt{5}i)(x + 2 + \sqrt{5}i).$$

Ex. Est-ce que le polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$ est divisible par $(z-i)$? -47-

On calcule $P(i) = i^2 + (1-i)i - i = -1 + i + 1 - i = 0 \Rightarrow z=i$ est une racine de $P(z)$
 $\Rightarrow$ oui.

Polynômes à coefficients réels.

Proposition Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(z)$ à coefficients réels
alors $\bar{z}$ l'est aussi.

Dém. On va démontrer que $P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0$ si $P(z)$ est à coeff. réels.

$$P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

notation $\rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k$ // $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a}_i = a_i \forall i$

$\Rightarrow$ Si z est une racine $\Rightarrow \bar{z}$ l'est aussi (si les coeff. de $P(z)$ sont réels). $\square$

Remarque. Si $P(x)$ est à coeff. réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une solution $\Rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$

est aussi une solution $\Rightarrow P(\bar{z}) = P(z) = 0$

$\Rightarrow (x-z)(x-\bar{z})$ si degré de $P \geq 2$ divise le polynôme

$$(x-z)(x-\bar{z}) = (x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z}) = (x^2 - \underbrace{(2\operatorname{Re} z)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{x}_{\text{variable}} + \underbrace{|z|^2}_{\in \mathbb{R}})$$

divise $P(x)$

- 48 -

Conclusion Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en produit des polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.

Sous-ensembles du plan complexe.

Ex 1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ $r \in \mathbb{R}$ Considérons $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

$$\begin{array}{ccc} z = x + iy & , & z_0 = x_0 + iy_0 \\ \xrightarrow{\text{variable}} & & \xrightarrow{\text{constante}} \end{array}$$

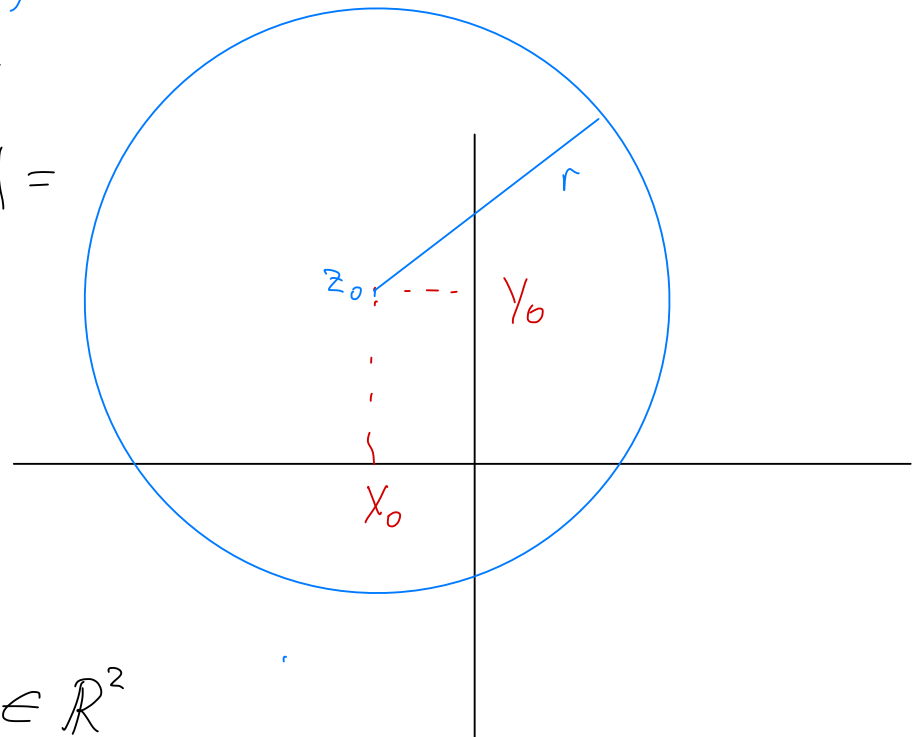
$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |x + iy - x_0 - iy_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

équation du cercle de rayon r

et centre $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$$



E x 2. $\{ z \in \mathbb{C}^* : \left(\frac{z}{|z|} \right)^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = e^{i \frac{\pi}{4}}$$

Soit $z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \left(\frac{\cancel{\rho} e^{i\varphi}}{\cancel{\rho}} \right)^4 = e^{4i\varphi} = e^{i \frac{\pi}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho > 0$ est arbitraire!

$$\varphi \in \left\{ \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}, k=0,1,2,3 \right\}$$

$$\Rightarrow \varphi = \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{16} + \pi, \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right\}$$

ρ arbitraire

4 demi-droites ouvertes.

