

§1.5. Nombres complexes.

[DZ, Chapitre 2]

-31-

On a vu que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.
Maintenant : l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice: Dériver à partir des axiomes de $\mathbb{R}$ [DZ §1.1.5]

(1) Si $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$: $x \geq 0 \Rightarrow (x + (-x)) \geq -x \Rightarrow 0 \geq -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot x = 0$: $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 0 \cdot x = (x + (-x)) \cdot x = x \cdot x + (-x) \cdot x = 0 \Rightarrow (-x) \cdot x = x \cdot (-x) = -x \cdot x \\ 0 = 0 \cdot (-x) = (x + (-x)) \cdot (-x) = x \cdot (-x) + (-x) \cdot (-x) = 0 \Rightarrow x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = -((-x) \cdot (-x)) \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x). \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0 \\ \text{Si } x \leq 0 \Rightarrow (-x) \geq 0 \Rightarrow (-x) \cdot (-x) = x \cdot x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(4) $-1 < 0$: $1 \neq 0$ par axiome $\Rightarrow -1 \neq 0$. Si $-1 > 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$ absurde
puisque on suppose $(-1) > 0$ (voir (1))
 $\Rightarrow -1 < 0$.

Par (3) on a : $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Par (4) on a : $-1 < 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Par (3) on a : } x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{Par (4) on a : } -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = -1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}. \quad \square$$

Alors on introduit le symbole " i " tel que $i^2 = -1$

On considère les expressions de la forme $\{z = a+ib\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$
avec les opérations suivantes:

-32-

$$(+)\ (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$\exists 0 \in \mathbb{C} : 0 + i0 \equiv 0 \text{ tel que } (a+ib) + 0 + i0 = a+ib \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\exists \text{ opposé pour } (a+ib) : (-a+i(-b)) + (a+ib) = 0 + i0 \equiv 0.$$

$$(\cdot)\ (a+ib) \cdot (c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$\exists 1 \in \mathbb{C} : 1 = 1 + i0 : (a+ib)(1+i0) = a+ib \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

Proposition Soit $z = a+ib \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ ($z \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0$)

Vérification : $(a+ib) \cdot \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2 + i \overbrace{(ab-ba)}^{=0}}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

$$z = a+ib \in \mathbb{C} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}}$$

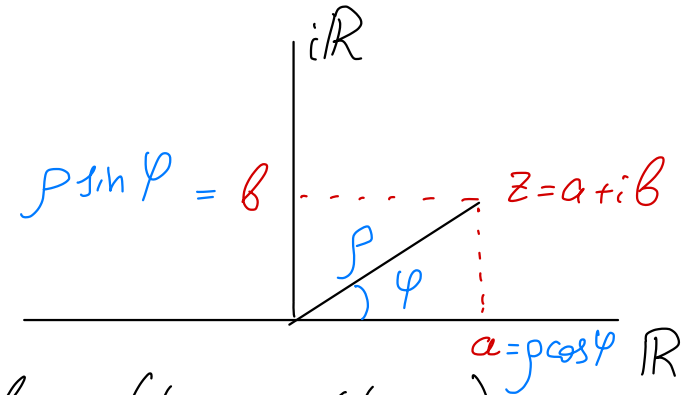
Exercice: vérifier la distributivité : $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Donc $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné: $\left. \begin{array}{l} i > 0 \Rightarrow i^2 = -1 > 0 \\ i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 > 0 \text{ absurde puisque} \\ -1 < 0 \text{ dans } \mathbb{R} < \mathbb{C} \end{array}$ -33-

Remarque: On a deux racines complexes de l'équation $z^2 = -1$: $z_1 = i$ et $z_2 = -i$

3 formes des nombres complexes.



Forme cartésienne

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

partie réelle $\rightarrow$ partie imaginaire

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$$

Le module de z :

$$|z| \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

si et seulement si

Forme polaire (trigonométrique)

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi, \quad \operatorname{Im} z = \rho \sin \varphi$$

$$|z| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho \geq 0$$

le module de $z = \rho$

L'argument de $z \neq 0$

φ est défini à $2k\pi$ près $k \in \mathbb{Z}$

$$\rho \neq 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{\rho}$$

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{b}{a} \quad \text{si } a = \operatorname{Re} z \neq 0$$

Comment trouver l'argument d'un nombre complexe
On utilise la fonction $\arctan x$

$$z = a + ib ?$$

-34-

Si $z = a + ib$: $a > 0$, alors

$$\varphi = \arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$$

$$\arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

Si $z = a + ib$, $a < 0$, alors

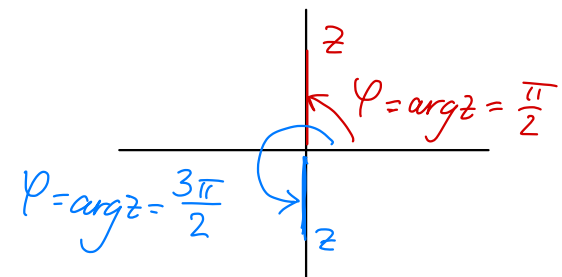
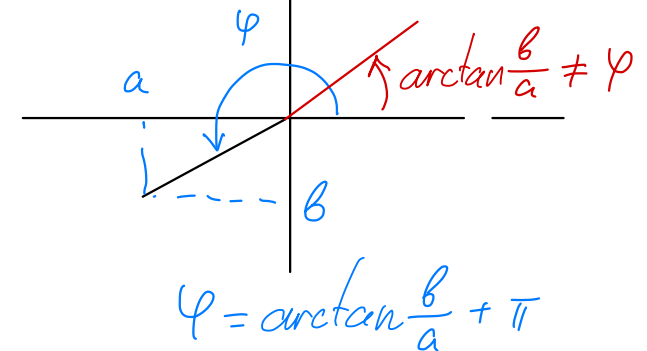
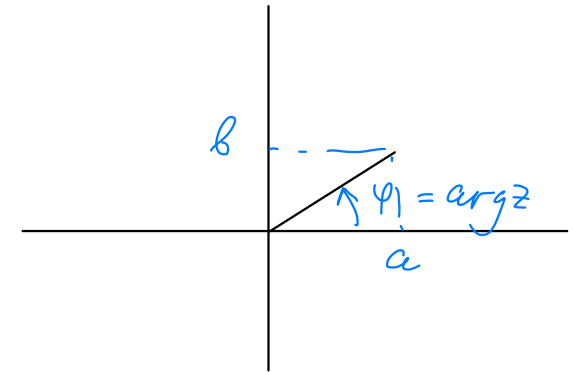
$$\varphi = \arg z \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\Rightarrow$$

$$\arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$

Si $\operatorname{Re} z = a = 0 \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}$ si $\operatorname{Im} z = b > 0$
 $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ si $\operatorname{Im} z = b < 0$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



Remarque L'argument de z est défini seulement pour $z \neq 0$.

Troisième forme de $z \in \mathbb{C}$: la forme polaire exponentielle.

Déf Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors $\underbrace{e^z = \exp(z)}_{\text{exp complexe}} \stackrel{\text{dét}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exp réelle}} (\cos y + i \sin y)$

En particulier:

$$\text{Si } z = x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x \quad (y=0)$$

$$\text{Si } z = iy \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (x=0)$$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \quad \text{Formule d'Euler } \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{e^{i(y_1+y_2)}}_{//} = \cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2) = \underbrace{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)}_{//}$$

$$\underbrace{e^{iy_1} \cdot e^{iy_2}}_{//} = (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \underbrace{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)}_{//}$$

$$\Rightarrow e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}$$

$$\text{Si } y_1 = y_2 + 2k\pi \Rightarrow e^{iy_1} = e^{i(y_2 + 2k\pi)} = e^{iy_2} (\overset{=1}{\cos 2k\pi} + i \overset{=0}{\sin 2k\pi}) = e^{iy_2}$$

$k \in \mathbb{Z}$

Rappel: forme polaire trigonométrique $z = \rho (\underbrace{\cos \varphi + i \sin \varphi}_{e^{i\varphi}}) = \underline{\rho e^{i\varphi}}$
la forme polaire exponentielle

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z| \cdot e^{i \arg z}$$

cartésienne polaire trig. $\longleftrightarrow$ polaire exp.

← les 3 formes d'un nombre complexe.

où $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ le module de z

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } |z| \neq 0 \Rightarrow \arg z &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), \text{ si } \operatorname{Re} z > 0 \\ &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi, \text{ si } \operatorname{Re} z < 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0 \\ &= \frac{3\pi}{2} \text{ si } \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z < 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{défini à } 2k\pi \\ \text{près, } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Très souvent on écrit la forme polaire $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$

Soit $y = \pi$, $x = 0 \Rightarrow e^{i\pi} = \overset{=-1}{\cos \pi} + i \overset{=0}{\sin \pi} = -1$

$$e^{i\pi} = -1$$

Formule d'Euler



Question 4.

Alors :

A. $|z| = 1$

B. $\arg z = e^{2i}$

C. $z \in i\mathbb{R}$

D $\arg z = \cos 2$

E. $|z| = e^{(e^2)}$

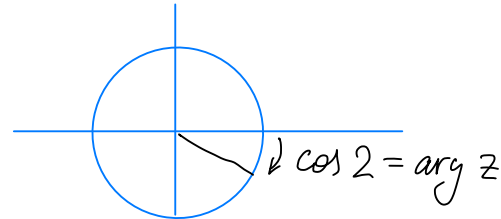
Soit $z = e^{ie^{2i}} = e^{i(e^{2i})}$

$$e^{i(e^{2i})} = e^{i(\cos 2 + i \sin 2)} =$$

$$= e^{i \cos 2 - \sin 2} = \frac{1}{e^{\sin 2}} e^{i \cos 2} =$$

$$= \frac{1}{e^{\sin 2}} (\cos(\cos 2) + i \sin(\cos 2))$$

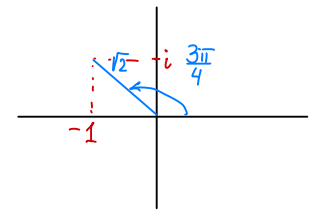
$$|z| = \frac{1}{e^{\sin 2}} ; \quad \arg z = \cos 2.$$



Ex 1 $z = -1 + i$ Forme polaire?

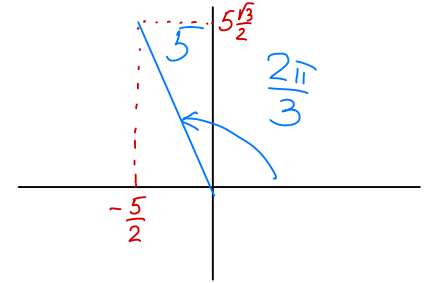
$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} ; \arg z = \arctan \frac{1}{-1} + \pi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



Ex 2 $z = 5 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ Forme cartésienne?

$$z = 5 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 5 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \underbrace{-\frac{5}{2}}_{\text{Re } z} + i \underbrace{\frac{5\sqrt{3}}{2}}_{\text{Im } z}$$



Multiplication en forme polaire.

Proposition. Soient $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$.

Alors $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Dém: $z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
par la propriété de multiplication des exponentielles complexes.

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2} \Rightarrow z_1 z_2 = (|z_1| \cdot |z_2|) e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$



Ex 3. Soit $z = e^{i\varphi}$ $|z| = 1$

$$w = e^{i\vartheta}, \quad |w| = 1$$

$$\Rightarrow z \cdot w = e^{i(\varphi + \vartheta)}$$

Division en forme polaire. $z = |z| e^{i \arg z} \neq 0$

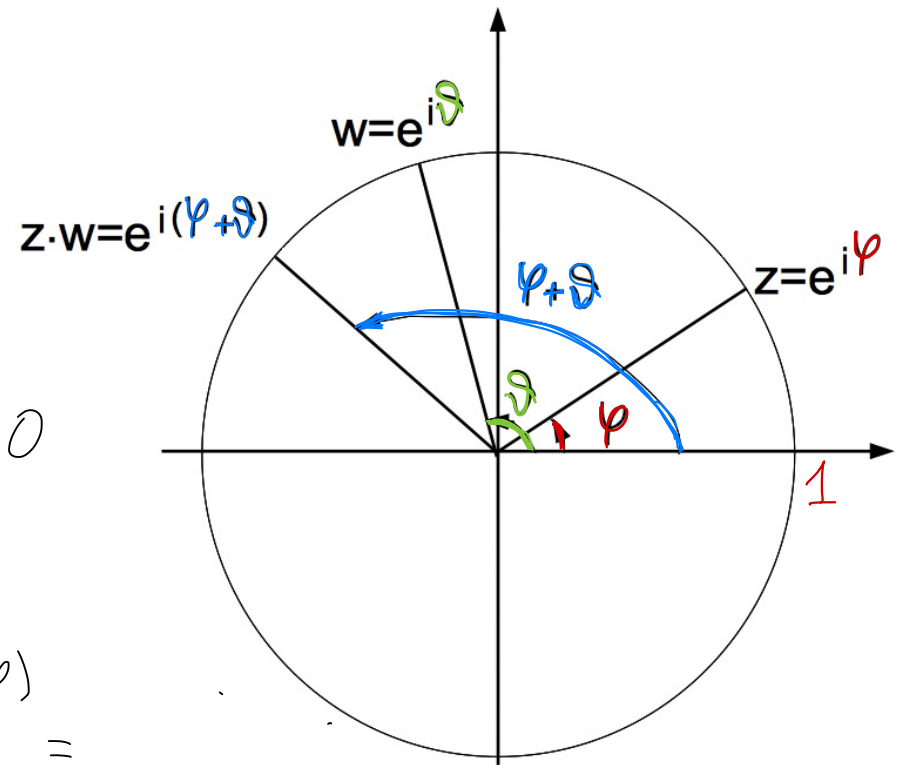
$$\Rightarrow z = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$$

Dém: $z \cdot z^{-1} = \rho e^{i\varphi} \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \rho \cdot \frac{1}{\rho} e^{i(\varphi - \varphi)} =$
 $= 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$

Si $z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$, $z_2 \neq 0$.

$\Rightarrow$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}, \quad |z_2| \neq 0$$



Proposition. (Formule de Moivre)

Pour tout $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

$P(n)$: $(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$

Formule de Moivre

Démonstration par récurrence

Proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq m$ ^{fixé}, $m \in \mathbb{N}$) $P(n)$

Initialisation: (1) Démontrer que $P(n)$ est vraie pour $n=m$

Hérédité (2) Démontrer que $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq m$.

$\Rightarrow$ Alors $P(n)$ est vraie pour $n=m \Rightarrow n=m+1 \Rightarrow n=m+2 \Rightarrow \dots$ pour tout $n \geq m$.

Initialisation: $n=1 \Rightarrow (\rho e^{i\varphi})^1 = \rho^1 e^{i\varphi}$ **VRAI**

Hérédité: Supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$: $(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$

Démontrons que $P(n+1)$ est vraie:

$$(\rho e^{i\varphi})^{n+1} = (\rho e^{i\varphi})^n \cdot (\rho e^{i\varphi}) = \rho^n e^{in\varphi} \cdot \rho e^{i\varphi} = \rho^n \cdot \rho \cdot e^{in\varphi + i\varphi} = \rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{P(n) \Rightarrow P(n+1)} \quad \text{produit en forme exp polaire} \quad \text{VRAI}$

$\Rightarrow$ Par récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

