

Rappel: L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$.

Déf.

Si $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1) a \leq x \quad \forall x \in S$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in S : x - a \leq \varepsilon$$

$$x \leq a + \varepsilon$$

Alors $a = \inf S$ (la borne inférieure de S)

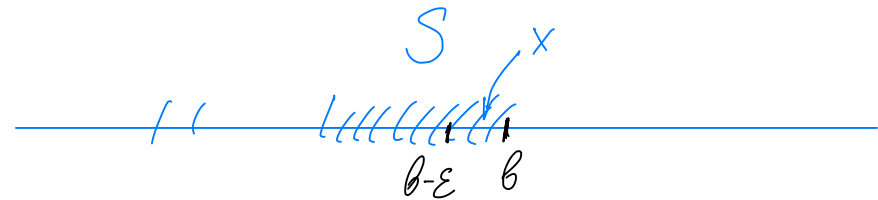
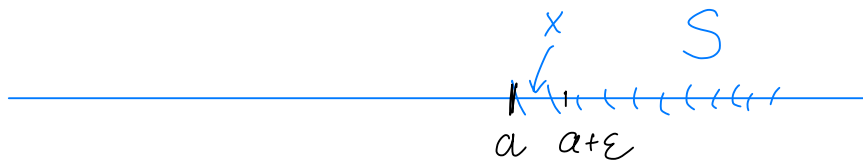
Si $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ et $b \in \mathbb{R}$ est tel que

$$(1) b \geq x \quad \forall x \in S$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in S : b - x \leq \varepsilon$$

$$x \geq b - \varepsilon$$

Alors $b = \sup S$ (la borne supérieure de S)



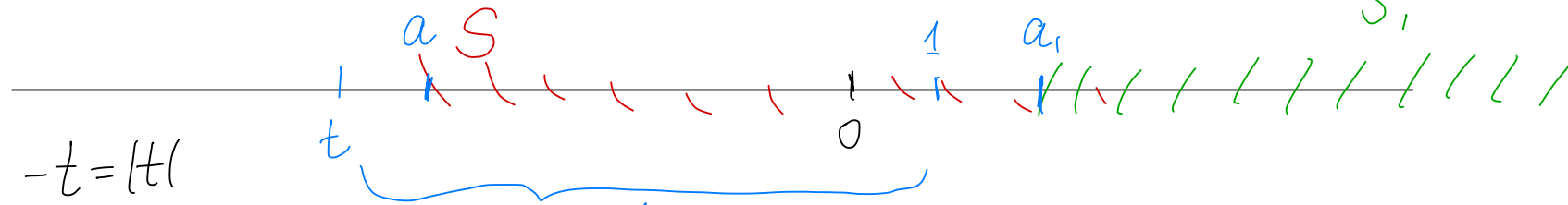
Axiome: Tout sous-ensemble non-vide $S \subset \mathbb{R}_+^*$ (réels positifs) admet une borne inférieure.

$$\mathbb{R}_+^* = \{x > 0\}$$

Thm Tout sous-ensemble non-vidé majoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un supremum qui est unique.
Tout sous-ensemble non-vidé minoré $S \subset \mathbb{R}$ admet un infimum qui est unique.

Dém: (a) $S \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \Rightarrow$ par l'axiome $\exists a \in \mathbb{R} : a = \inf S$.

(b) $S \subset \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R} : \forall x \in S \Rightarrow x \geq t$, mais $t \leq 0$.



Soit $S_1 = \{x - t + 1, x \in S\} \subset \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ Par l'axiome $\exists a_1 = \inf S_1$

Alors $a = a_1 + t - 1 = \inf S$.

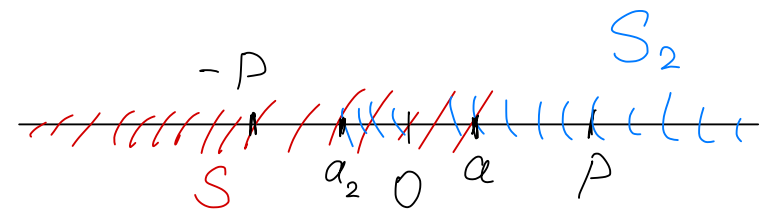
(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in S_1 : y - a_1 \leq \varepsilon$

(1) $\forall x \in S \Rightarrow \underbrace{x - t + 1}_{S_1} \geq a_1 \Leftrightarrow x \geq a_1 + t - 1 = a$
 $\exists x \in S : y = x - t + 1 \Rightarrow x - t + 1 - a_1 = x - a \leq \varepsilon$.

(c) $S \subset \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in S \Rightarrow x \leq p$.

$\Rightarrow$ Soit $S_2 = \{y \in \mathbb{R} : y = -x, x \in S\}$

$\Rightarrow S_2$ est minoré $\Rightarrow$ (b) s'applique $\Rightarrow \exists \inf S_2 = a_2 \Rightarrow -a_2 = a = \sup S$



Unicité Si $\inf S$ existe, alors il est le plus grand minorant de S .
 Si $\sup S$ existe, alors il est le plus petit majorant de S .
 En particulier, $\inf S$ et $\sup S$ sont uniques (s'ils existent).

Idée: par absurde. Supposons que S est tel que $\exists \sup S$
 et $b \in \mathbb{R} : b$ est un majorant de S et $b < \sup S$.

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{\sup S - b}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \sup S - \varepsilon > b \geq x \quad \forall x \in S \quad (b \text{ est un majorant})$$

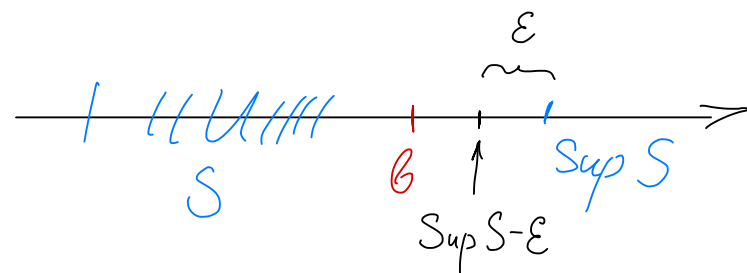
$$\Rightarrow \sup S - \varepsilon > x \quad \forall x \in S$$

$$\Rightarrow \sup S - x > \varepsilon \quad \forall x \in S$$

$\Rightarrow$ contradiction avec la déf de $\sup S$.

$\Rightarrow \sup S$ est le plus petit majorant de S .

Le cas de l'infimum est symétrique



Notation intervalles.

Soit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Intervalles bornés: -26-

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b] \text{ intervalle fermé borné}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[\text{ intervalle ouvert borné}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a, b[\text{ intervalle borné ni ouvert ni fermé}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} =]a, b] \text{ — " —}$$

$$-\infty \text{ et } \infty : \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}} \text{ la droite réelle achevée}$$

$$\text{d'f: } -\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Intervalles non-bornés:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} = [a, +\infty[\text{ fermé}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} =]-\infty, b] \text{ fermé}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[\text{ ouvert}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x < b\} =]-\infty, b[\text{ ouvert}$$

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[= \{x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[= \{x < 0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

Comment trouver $\sup S$, $\inf S$ pour un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ donné?

Exemples (1) Intervalles bornés. $\sup]a, b] = b = \max]a, b]$

$\inf]a, b] = a$, $a \notin]a, b]$.

(2) $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* : \sin x > \cos x\}$. $\inf S$? $\sup S$?
 $x > 0$

$\sin 0 = 0 < \cos 0 = 1$ $\sin x \uparrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ continue

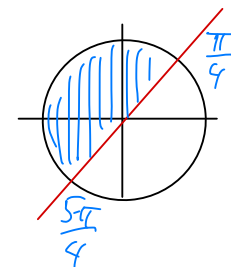
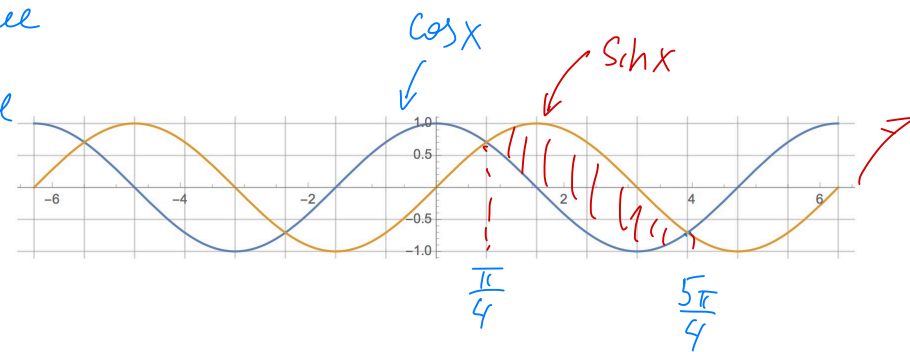
$\sin \frac{\pi}{2} = 1 > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\cos x \downarrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ continue

$\Rightarrow$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ $\sin x$ devient $> \cos x$
en un point

$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$
($\cos x \neq 0$)

$\Rightarrow$ il faut trouver le plus petit x positif tel que

$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \inf S = \frac{\pi}{4}$.



$\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1 > \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow S$ n'est pas majoré
 $\Rightarrow \sup S$ n'existe pas.

Question 3.

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} : \frac{1}{\ln x} < 1\}$.

$x \in \mathbb{R}_+^* : x > 0$.

Alors:

A. $\inf A = 0$.

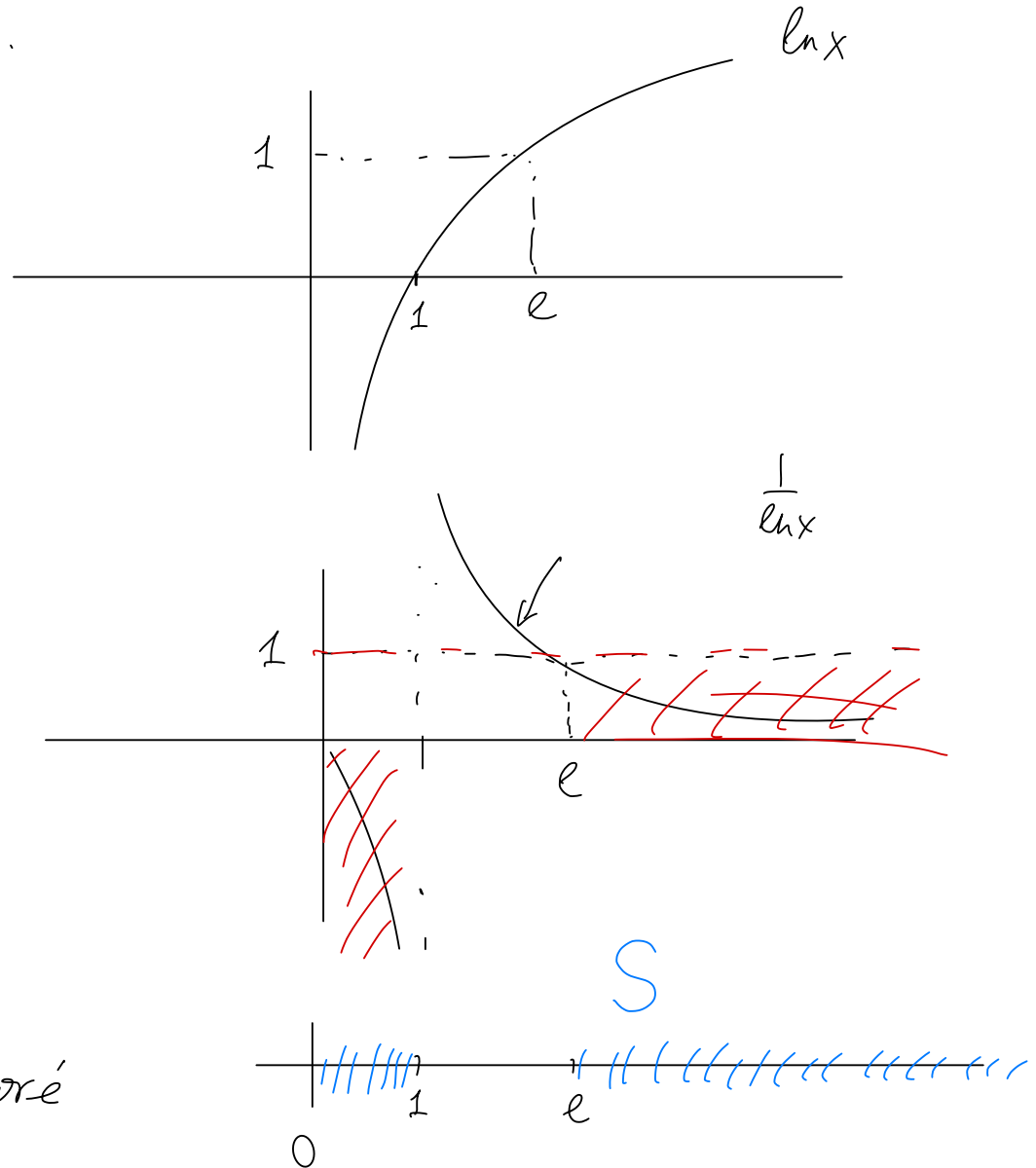
B. $\inf A = e$.

C. A n'est pas minoré

D. $\sup A = e$.

$$S =]0, 1[\cup]e, +\infty[$$

$\inf S = 0$, S n'est pas majoré



Thm. Propriété d'Archimède Pour tout couple (x, y) de nombres réels -28-
tel que $x > 0$ et $y \geq 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx > y$.

Dém: (1) $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Par absurde: supposons que $\mathbb{N}$ est majoré.

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x = \sup \mathbb{N} ; \text{ pour } \varepsilon = \frac{1}{2} \exists n \in \mathbb{N} : x - n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq n + \frac{1}{2} < \underbrace{n+1}_m \in \mathbb{N} \Rightarrow m > \sup \mathbb{N} \text{ absurde} \Rightarrow \mathbb{N} \text{ n'est pas majoré dans } \mathbb{R}.$$

$\sup \mathbb{N}$

$$(2) \text{ Soit } \frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{y}{x} \Leftrightarrow nx > y \quad x > 0$$



Donc $\mathbb{R}$ est un corps archimédien

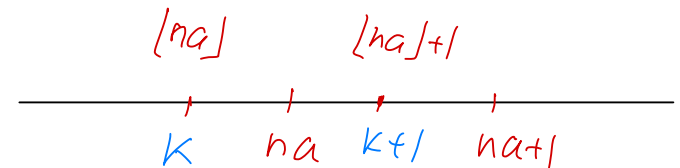
Thm $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout couple $a, b : a < b \in \mathbb{R}$
il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q} : a < r < b$. $\swarrow x=b-a>0, y=1$

Dém: Par la propriété d'Archimède : $\exists n \in \mathbb{N}^* : n(b-a) > 1 \Rightarrow b-a > \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow a < a + \frac{1}{n} < b \quad \Rightarrow \frac{na}{n} < \frac{na+1}{n} < b$$

$$a = \frac{na}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < b$$

$$\Rightarrow r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } a < r < b$$



$\lfloor na \rfloor \leq na < \lfloor na \rfloor + 1$
partie entière



Exercice: Soient $r < q$ $r, q \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $r < x < q$.
 irrationnel

($\Rightarrow \forall x < y, x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$) [DZ §1.3.7]

Ex (3) $S = \{x > a\} =]a, +\infty[: \exists \inf S = a ; \sup S$ n'existe pas.

Ex (4) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ et } 2 \leq x^2 \leq 9\} \subset \mathbb{R}$

Exercice: $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ (à partir de si $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$)
 $x > 0$

Sup S = 3 (1) $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3$ Vrai $\Rightarrow \sup S = 3$
 (2) Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow x = 3 \in S : \sup S - x = 3 - 3 = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ Vrai

inf S = $\sqrt{2}$ (1) $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$ Vrai
 $x > 0$

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $x \in S : \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} + \varepsilon$

Par le thm de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < q < \sqrt{2} + \varepsilon$

Soit $x = \min(q, 3) \Rightarrow x \in S$ et $\sqrt{2} < x < \sqrt{2} + \varepsilon$ Vrai $\Rightarrow \inf S = \sqrt{2}$

Remarque. Ça montre aussi que le corps $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas l'axiome de la borne inférieure.

Remarque Si $\inf S \in S$, on dit que S possède un minimum
 $\min S = \inf S$ dans ce cas.

Si $\sup S \in S$, on dit que S possède un maximum,
 $\max S = \sup S$ dans ce cas.

Ex 4: $\max S = \sup S = 3$; $\inf S = \sqrt{2} \notin S \Rightarrow S$ n'a pas de minimum.