

Chapitre 1. Nombres réels.

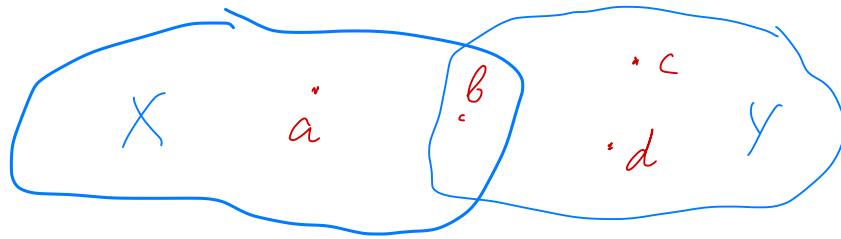
-13-

§ 1.1. Ensembles.

Ensemble = „Collection des objets définis et distincts“ G. Cantor

Remarque. Dans ce cours on considère seulement des éléments d'un ensemble universel, par exemple les nombres. (Zermelo)

Rappel sur les ensembles. On suppose que les ensembles considérés contiennent que des éléments d'un ensemble universel U



$a \in X$ appartient

$a \notin Y$ n'appartient pas

$\forall \leftrightarrow$ pour tout ; $\exists \leftrightarrow$ il existe

Def $X \subset Y$ X est un sous-ensemble de Y
 sous-ensemble $\forall b \in X \Rightarrow b \in Y$ $\Rightarrow$ implique

$X \not\subset Y$ n'est pas un sous-ensemble

Négation: $\exists b \in X$ tel que $b \notin Y$

$Y = X \stackrel{\text{def}}{\iff} Y \subset X$ et $X \subset Y$

Négation: $Y \neq X \iff Y \not\subset X$ ou $X \not\subset Y$
 si et seulement si

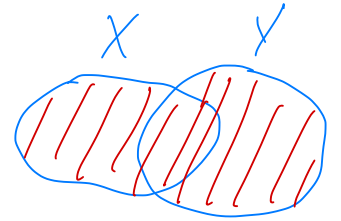
$\emptyset$ ensemble vide : $\emptyset = \{ \} \Rightarrow \emptyset \subset X \quad \forall X$

$X \subset X \quad \forall X$

Opérations ensemblistes.

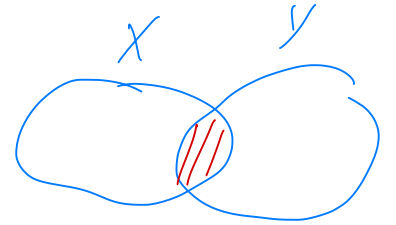
Soient $X, Y, Z \subset$ ensemble universel $\mathcal{U}$ -15-

(1) Réunion : $X \cup Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ ou } a \in Y\}$
tel que



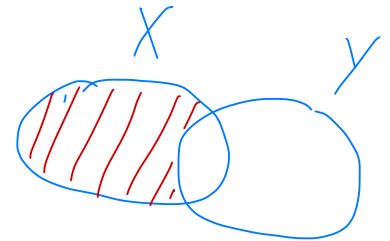
$$X \cup Y = Y \cup X$$

(2) Intersection $X \cap Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \in Y\}$



$$X \cap Y = Y \cap X$$

(3) Différence $X \setminus Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{a \in \mathcal{U} : a \in X \text{ et } a \notin Y\}$



$$X \setminus Y \neq Y \setminus X$$

$$f \notin X \setminus Y \Leftrightarrow \{f \in \mathcal{U} : f \notin X \text{ ou } f \in Y\}$$

en général

Exemple.

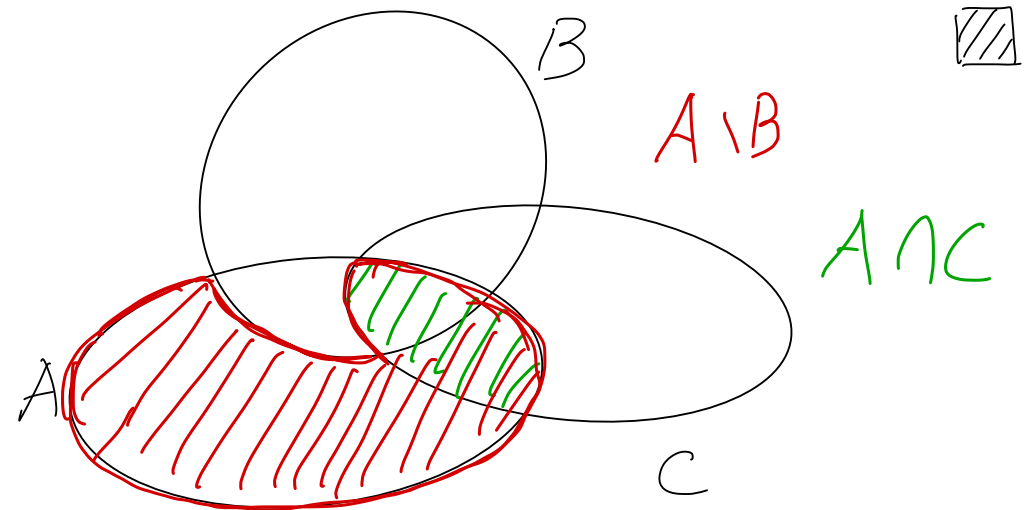
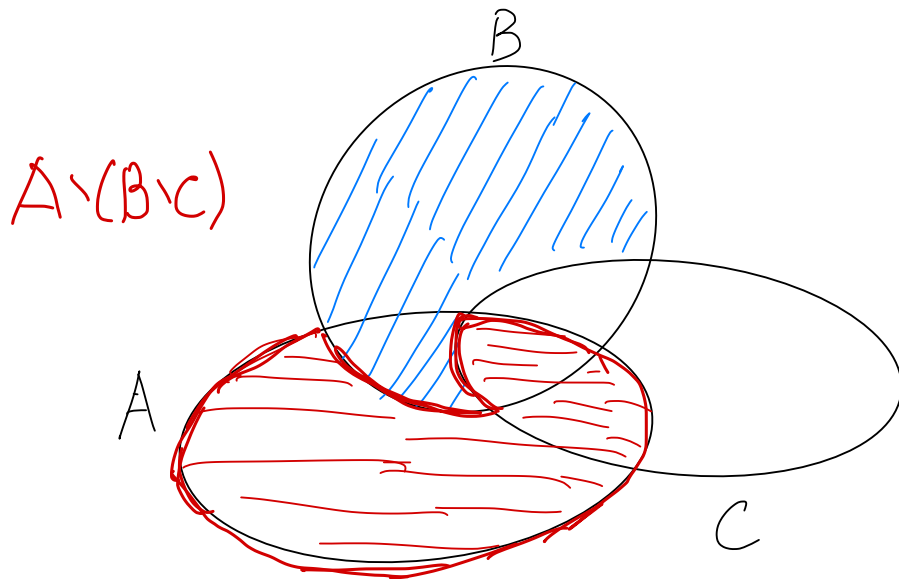
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Dém: $x \in \mathcal{U}$ est tel que $x \in B \setminus C = \{x \in \mathcal{U} : x \in B \text{ et } x \notin C\}$

$$x \notin B \setminus C = \{x \in \mathcal{U} : x \notin B \text{ ou } x \in C\}$$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \setminus C) &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ et } x \notin (B \setminus C)\} = \\ &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in C)\} = \\ &= \{x \in \mathcal{U} : \underbrace{(x \in A \text{ et } x \notin B)}_{\text{déf de } A \setminus B} \text{ ou } \underbrace{(x \in A \text{ et } x \in C)}_{\text{déf de } A \cap C}\} = \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \setminus B\} \cup \{x \in \mathcal{U} : x \in A \cap C\} = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$



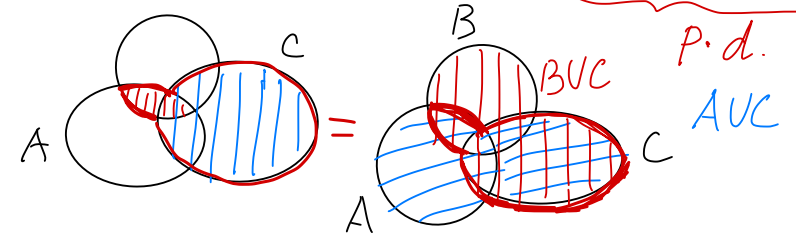
Question 2

Soient A, B, C trois sous-ensembles de U . Alors

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$

(1): $x \in A, x \notin B, C \Rightarrow x \in$ ^{P.g.} partie gauche
 $x \notin$ ^{P.d.} partie droite

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ Vrai



3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

(3): $x \in A \cap B, x \notin C \Rightarrow x \in$ p.g.
 $x \notin$ p.d.

4. $(A \setminus B) \cup C = (B \setminus A) \cup C$

(4) $x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow x \in$ p.g.
 $x \notin$ p.d.

5. $(A \cap C) \setminus B = (A \cap B) \setminus C$

(5) $x \in A, x \in C, x \notin B \Rightarrow$
 $x \in$ p.g., $x \notin$ p.d.

Nombres naturels, rationnels, réels

Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ avec „+“ et „•“
 et la relation d'ordre : on dit que $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$.

Propriété de bon ordre: Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément.

Propriété de récurrence: Soit $S \subset \mathbb{N}$ tel que

- (1) $0 \in S$
- (2) Si $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

} Alors $S = \mathbb{N}$

Les entiers relatifs: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

soustraction

$\forall x \in \mathbb{Z}$ possède un élément opposé par rapport à l'addition:

$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$; $y = -x$ notation

Les nombres rationnels: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} / \left(\frac{p}{q} = \frac{t}{s} \text{ si } p \cdot s = t \cdot q \right)$

division

$\forall x \in \mathbb{Q} : x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$

y est le réciproque de x . Notation: $\frac{1}{x} = y$.

Nombres réels $\mathbb{R}$

solution des
équation algébriques
et nombres transcendants

-18-

Proposition Soit $x : x^2 = 2, x > 0$
Alors $x \notin \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ - réels

Dém: par absurde : Supposons que $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ et tels que q est le plus petit possible (on utilise ici la propriété de bon ordre)

Alors : $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair
[Si $p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair]

$\Rightarrow p = 2m \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ est pair

$\Rightarrow q$ est pair $\Rightarrow q = 2n$

$\Rightarrow x = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$, où $n > 0$, $n < q$ contradiction

$\Rightarrow x$ ne peut pas être présenté par $\frac{p}{q}$.



Définition axiomatique de $\mathbb{R}$.

(1) $\mathbb{R}$ est un corps : ensemble avec $+$, $\cdot$ satisfaisant les axiomes suivants
commutatif $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(\cdot) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(\cdot) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(\cdot) x + y = y + x$$

$$(\cdot) x \cdot y = y \cdot x$$

$$(\cdot) \exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

$$(\cdot) \exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \neq 0 \text{ et } x \cdot 1 = x$$

$$(\cdot) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$$

$$(\cdot) \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$$

$$(\cdot) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

(2) $\mathbb{R}$ est un corps ordonné. $\exists$ une relation d'ordre $\leq$ tel que
 pour tout couple d'éléments $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$(\cdot) x \leq y \text{ ou } y \leq x \text{ et si } x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$(\cdot) x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$(\cdot) \text{ Si } x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$(\cdot) \text{ Si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$$

Notations:

Si $x \leq y$ et $x \neq y \Rightarrow x < y$

Si $x \geq y$ et $x \neq y \Rightarrow x > y$.

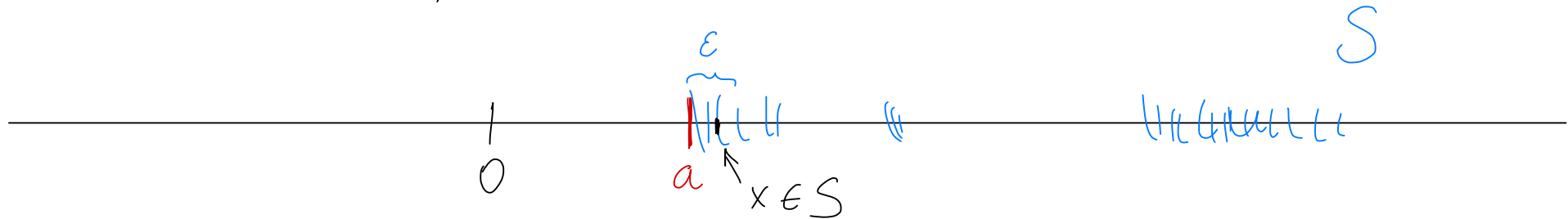
[3] $\mathbb{R}$ est un corps complet. ; $\mathbb{R}$ satisfait

Axiome de la borne inférieure

Pour tout sous-ensemble S non-vide de $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ tel que

$$(1) a \leq x \quad \forall x \in S$$

(2) Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x \in S$ tel que $x - a \leq \varepsilon$ ($\Leftrightarrow x \leq a + \varepsilon$)



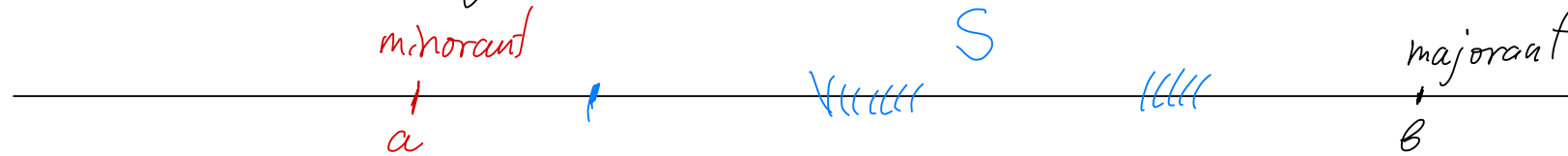
Si les axiomes [1], [2], [3] sont satisfaites, alors on obtient un corps commutatif, ordonné et complet. Ce sont les axiomes des nombres réels $\mathbb{R}$.

Borne inférieure et supérieure.

Déf Soit $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. Alors $a \in \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R}$) est un **minorant** (un **majorant**) de S si $\forall x \in S$ on a $a \leq x$ ($x \leq b$).

Si S admet un **minorant** (un **majorant**) alors S est minoré (majoré).

Si S est majoré et minoré, alors S est borné.



Déf Soit S un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Un nombre réel b (resp. a) vérifiant les propriétés suivantes:

$$(1) \forall x \in S, x \leq b \quad (x \geq a)$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \text{ il existe un élément } x \in S \text{ tel que } b - x \leq \varepsilon$$

$(x - a) \leq \varepsilon$

est le $\left[\begin{array}{cc} \text{supremum (borne supérieure)} & \text{infimum (borne inférieure)} \\ b = \sup S & a = \inf S \end{array} \right]$ de S .

Ex $S = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}}$ $S \subset \mathbb{R}$

(1) $1 = \sup S$ (1) $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$ Trouver $x \in S$: $1 - x \leq \varepsilon$

On peut prendre $x = 1 \in S \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ on a : $1 - 1 = 0 < \varepsilon$ Vrai
 $\Rightarrow 1 = \sup S.$

(2) $0 = \inf S.$ (1) $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vrai

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $x \in S$: $x - 0 \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ trouver $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

On prend $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \in S$
 partie entière

$\Rightarrow x = \frac{1}{n}$ avec $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ Vrai

$\Rightarrow 0 = \inf S.$

