

Analyse I : résumé du cours

On a étudié les sujets suivants:

- nombres réels (inf-sup), nombres complexes
- suites numériques (a_n)
- série numériques $\sum a_n$
- fonctions réelles
- limites des fonctions
- dérivées des fonctions
- développements limités
- séries entières, séries de Taylor
- intégrales des fonctions continues sur $[a, b]$
- intégrales généralisées

Les sujets sont liés.

① Limites des suites $\Leftrightarrow$ Limites des fonctions $\xrightarrow{\text{red}} \lim f(a_n) = l \quad \forall (a_n): \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(1) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = l$ (Par contre $\exists$ des fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = l$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ n'existe pas)

(2) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ (Par contre $\exists$ des fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ n'existe pas)

Ex $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+1} \right)^{2\sqrt{n}}$ 1^∞

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e \text{ si } \lim_{h \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(1) directement $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1+2}{\sqrt{n}+1} \right)^{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}+1}\right)^{\frac{\sqrt{n}+1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{n}+1} \cdot 2\sqrt{n}} = e^4$

(2) $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+3x}{1+x} \right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+x+2x}{1+x} \right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} \ln \left(1 + \frac{2x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} \left(\frac{2x}{1+x} + \underbrace{\left(\frac{2x}{1+x} \right) \cdot \varepsilon(x)}_{\rightarrow 0} \right) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1+x} \right)^{\frac{2}{x}} = e^4$$

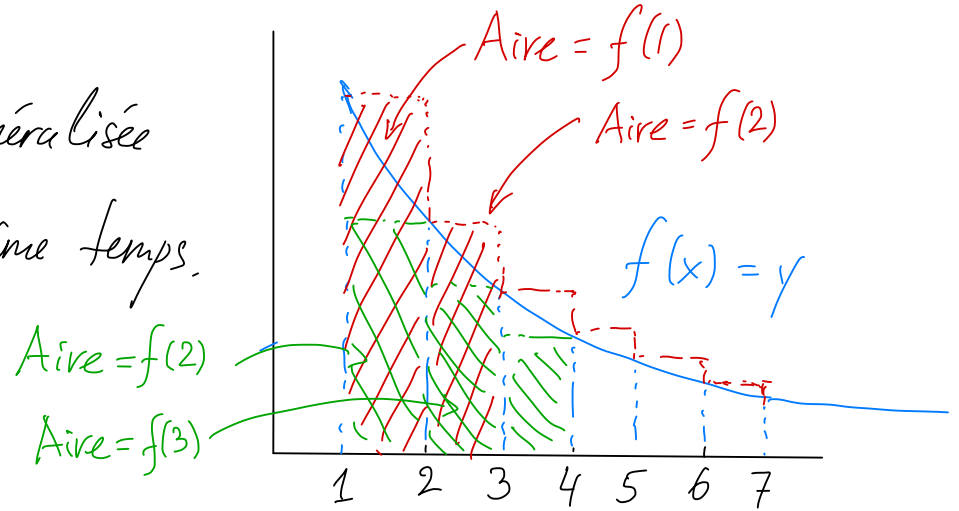
$\ln(1+y) = y + y \varepsilon(y)$
 $\varepsilon(y) \rightarrow 0$

② Séries numériques $\longleftrightarrow$ Intégrales généralisées

Proposition. Soit $f \geq 0$ une fonction continue et strictement décroissante.
pour tout $x \geq a$ pour un certain $a \geq 1$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergent ou divergent en même temps.

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$



Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$ $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$

difficile Proposition *facile*

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \text{somme des aires des rectangles rouges}$

Ex. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^c}$ pour quelles valeurs de c la série converge-t-elle? $\Leftrightarrow$ proposition

$$\Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^c} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^c} \quad (u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{1-c} u^{1-c} \right|_{\ln 2}^R = \begin{cases} \frac{1}{c-1} (\ln 2)^{1-c}, & c > 1 \\ \text{diverge} & c < 1 \\ \text{diverge} & c = 1 \end{cases}$$

Alors par la proposition $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^c}$ converge $\Leftrightarrow c > 1$.

③ Rappel rapide:

Continuité - dérivabilité :

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$$

Continue? dérivable? -262-
continument dérivable?

(1) Continue: $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ existent? $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

(2) Dérivable: $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x}$ existe? $f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - h(0)}{x}$ existe? $f'_d(0) = f'_g(0) = f'(0)$
 $h'(x)$, $g'(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = f'(0)$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = f'(0)$

Suites: (1) utiliser les limites remarquables $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\liminf$, $\limsup$.

Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

Ex. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = -5$ $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = 5$.
 $1 - 1 \ 1 - 1$ $a_0 - a_1, a_2 - a_3, a_4 - a_5$

(3) suites définies par récurrence

Méthode 1 $a_{n+1} = b a_n + c$, $|b| < 1 \Rightarrow (a_n)$ conv.

Méthode 2 $a_{n+1} = g(a_n)$, $g(x) \uparrow \Rightarrow (a_n)$ est monotone $\uparrow$ démontrer majoration $\downarrow$ démontrer minoration $\Rightarrow$ convergence.

Séries: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (1) D'Alembert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ (2) Cauchy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ (3) Comparaison (4) Leibnitz (5) Intégrale $a_n \geq 0$

(4)

Croissance relative des fonctions

-263-

Q: Parmi les limites suivantes, lesquelles sont égales à zéro?

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad \begin{matrix} \text{BH} \\ a > 1, \alpha > 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) x^{\alpha-k}}{\underbrace{a^x (\ln a)^k}_{\rightarrow \infty}} = 0 \quad \begin{matrix} \leq 0 \end{matrix}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \underbrace{\alpha x^\alpha}_{\rightarrow \infty}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln x \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \end{matrix} \quad y = \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^\alpha} (-\ln y) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} \stackrel{(2)}{=} 0$$

L'hierarchie de croissance des fonctions.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$a > 1, \alpha > 0$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$\alpha > 0$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

$\alpha > 0$

Notation: $\succ$ = croît plus vite

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^{\frac{\alpha}{k}} \succ \ln x \Rightarrow x^\alpha \succ (\ln x)^k$$

$\alpha > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{k} > 0$

$$a^x \succ x^\alpha$$

$\alpha > 0$

$$x^\alpha \succ (\ln x)^k$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$a > 1$

D'Alembert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$n! > a^n$$

$a > 1, n \rightarrow \infty$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

D'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)} n^n}{\cancel{(n+1)} (n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$$n^n > n!$$

$n \rightarrow \infty$

Alors on a l'hierarchie des croissances :

$$n^n > n! > a^n > n^p > (\ln n)^q$$

$$a > 1$$

$$p > 0$$

$$q > 0$$

$$\int$$

$$a^x$$

$$\int$$

$$x^p$$

$$\int$$

$$(\ln x)^q$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$

⑤

Classes de régularité des fonctions.Analytique $\Leftrightarrow f(x) =$ sa série de Taylor sur I (ouvert).Infiniment dérivable $\Leftrightarrow f(x) \in C^\infty(I)$ lisse n fois continûment dérivable $\Leftrightarrow f \in C^n(I)$
 $n \geq 2$ $n \geq 2$ n fois dérivable $\Leftrightarrow f^{(n)}(x)$ existe sur I Dérivable $\Leftrightarrow f'(x)$ existe sur I Continue $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in I$ Intégrable sur $[a, b] \subset I \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx$ existe
(y compris les intégrales généralisées)

TAF : $\exists t \in]x, y[\subset I :$
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(t)$$

TVI : $[a, b] \subset I \Rightarrow$
$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right].$$

Thm de la moyenne
$$\exists c \in [a, b] \subset I \text{ t.q. } \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

⑥* Intégrale qui ne s'exprime pas en fonctions élémentaires

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

Mais on pourra calculer $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Considérons $I(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx} \sin x}{x} dx \Rightarrow I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$I'(s) = \int \frac{e^{-sx} \cdot (-x) \cdot \sin x}{x} dx = - \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin x dx = -\frac{1}{1+s^2} \Rightarrow I(s) \text{ est une primitive de } I'(s)$$

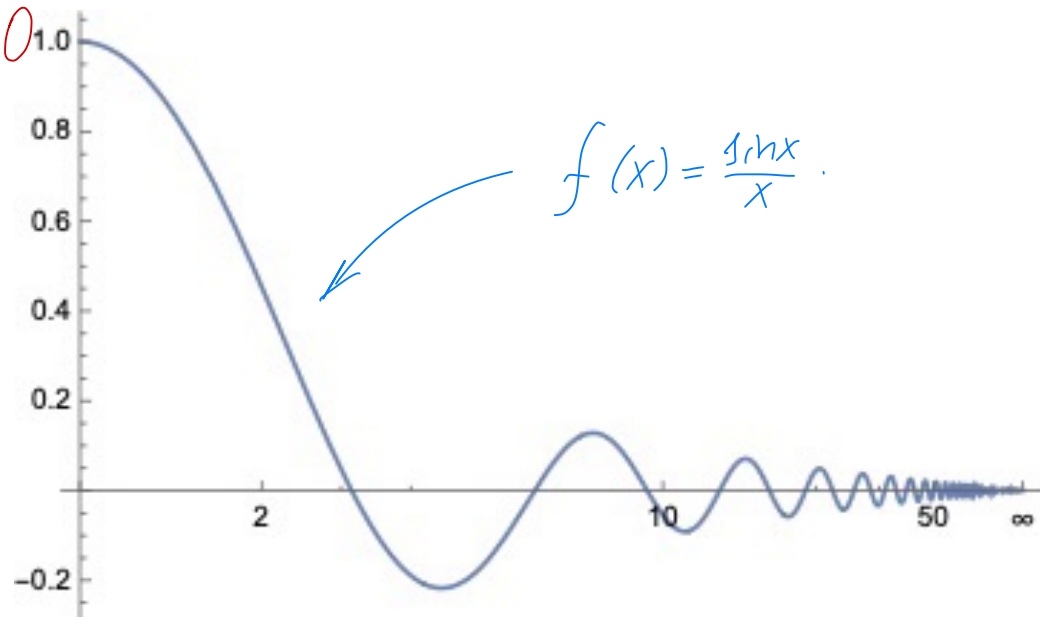
Laquelle ?? $\lim_{s \rightarrow \infty} I(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx} \sin x}{x} dx = 0$

$$I(s) = - \int \frac{1}{1+s^2} ds = -\arctan s + C$$

C telle que $\lim_{s \rightarrow \infty} I(s) = -\lim_{s \rightarrow \infty} (\arctan s + C) = 0$

$$= -\frac{\pi}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



Exercice

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \sin x dx = J(s), \quad s > 0$$

-269-

$$\int \underbrace{e^{-sx}}_{g'_1} \underbrace{\sin x}_{f_1} dx = -\frac{1}{s} \sin x e^{-sx} + \frac{1}{s} \int \underbrace{e^{-sx}}_{g'_2} \underbrace{\cos x}_{f_2} dx = -\frac{1}{s} \sin x e^{-sx} -$$

$$-\frac{1}{s^2} e^{-sx} \cos x + \frac{1}{s^2} \int e^{-sx} (-\sin x) dx = -\frac{1}{s} \sin x e^{-sx} - \frac{1}{s^2} \cos x e^{-sx} - \underbrace{\frac{1}{s^2} \int e^{-sx} \sin x dx}_{J(s)}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \int e^{-sx} \sin x dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \sin x - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \cos x + C$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{s} e^{-sR}}_{R \rightarrow \infty \rightarrow 0} \underbrace{\sin R}_{\text{borné}} - \underbrace{\frac{1}{s^2} e^{-sR} \cos R}_{R \rightarrow \infty \rightarrow 0} + \frac{1}{s} e^0 \sin 0 + \underbrace{\frac{1}{s^2} e^0 \cos 0}_{\frac{1}{s^2}} \right) = \frac{1}{s^2}$$

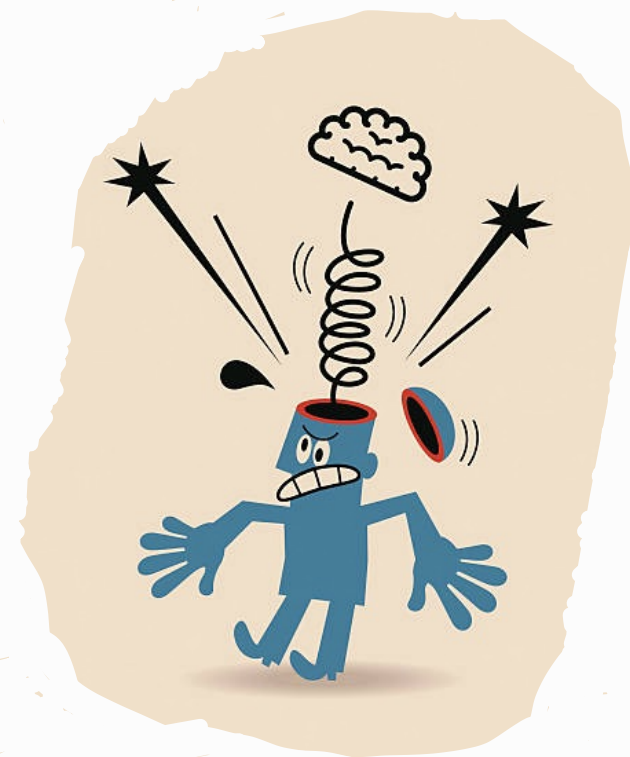
$$\Rightarrow J(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad s > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

← nous avons calculé

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{13}}{\frac{x}{13}} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{7}}{\frac{x}{7}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{9}}{\frac{x}{9}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{11}}{\frac{x}{11}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{13}}{\frac{x}{13}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{15}}{\frac{x}{15}} &= \\ \frac{467807924713440738696537864469\pi}{935615849440640907310521750000} &\approx 0.9999999999852937186 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Vraiment ???!!



Examen final: Lundi le 13 janvier 2025
9^h15 - 12^h45

salles: CE1515, CE1101, CE1104, CE1105, CE1106, CE4, CE6.

différentiable = dérivable, Sup = sup, Inf = inf

Sujets.

- (1) Nombres réels, inf-sup.
- (2) Nombres complexes
- (3) Méthode de récurrence
- (4) Limites des suites (y compris les suites définies par récurrence; ainsi que $\liminf$, $\limsup$)
- (5) Séries numériques: critères de convergence
- (6) Limites des fonctions (par déf., à partir des suites, avec BH, DL)
- (7) Continuité, prolongement par continuité, limites à gauche et à droite
- (8) TVI

- (9) Dérivée d'une fonction, fonction différentiable à gauche et à droite
y compris la dérivée logarithmique
- (10) TAF, propriétés des fonctions différentiables sur un intervalle
- (11) DL
- (12) Formule de Taylor et série de Taylor.
- (13) Séries entières, rayon et domaine de convergence
- (14) Intégrale et primitive, Théorème de la moyenne
- (15) Changement de variable, intégration par parties; décomposition en simples fractions
- (16) Intégrales généralisées, critères de convergence.

Comment réussir son examen.

(1) Lire et mémoriser les résumés

Ed discussion en janvier

(2-3) Relire les notes du cours

Faire examen 2020 + série questions ouvertes

(4) Relire les séries d'exercices.

(5) Faire examens 2017, 2018, 2019, 2021 (quelques uns)

(6) Relire les résumés !!

(7) Faire examen 2022



Joyeuses fêtes !