

Chapitre 8. Intégrales généralisées.

Intégrales généralisées sur un intervalle borné.

Déf Soit $a < b$ et $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_a^{b-} f(t) dt \stackrel{\text{d'f}}{=} \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt \quad \text{si la limite existe}$$

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(t) dt$ est divergente.

Si $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on définit l'intégrale généralisée par la limite

$$\int_{a+}^b f(t) dt \stackrel{\text{d'f}}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt \quad \text{si la limite existe}$$

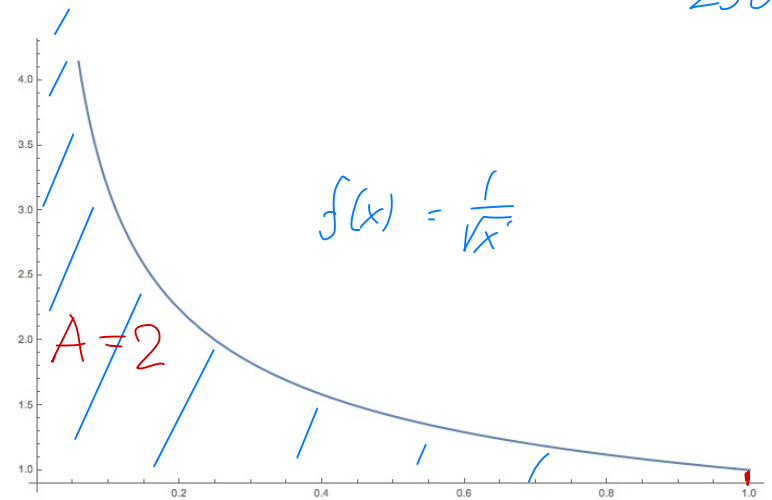
Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^b f(t) dt$ est divergente.

Notations

Ex 1. L'aire sous la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, 1]$

$$\int_{0+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(2x^{\frac{1}{2}} \Big|_t^1 \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} 2(1 - \sqrt{t}) = 2$$

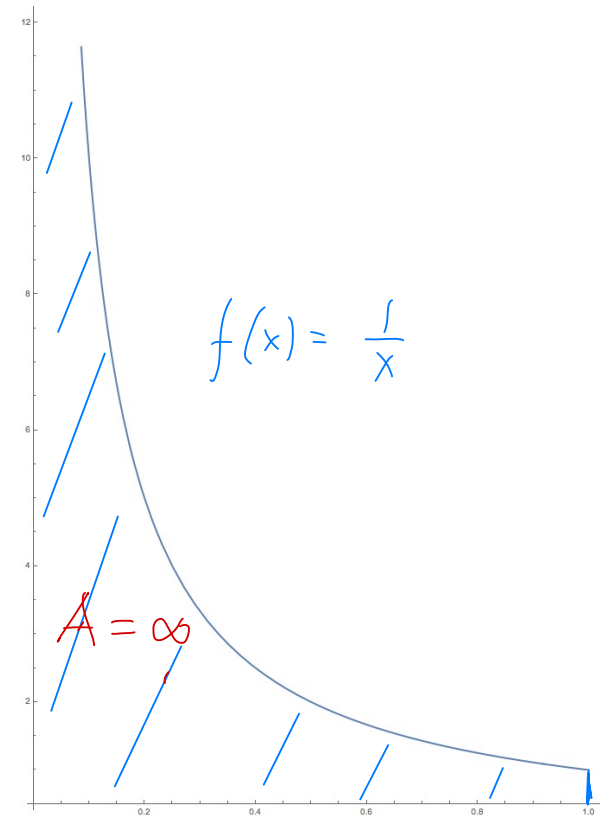


Ex 2. L'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$, $x \in]0, 1]$

$$\int_{0+}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\ln x \Big|_t^1 \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} (\underbrace{\ln 1}_{=0} - \underbrace{\ln t}_{\rightarrow -\infty}) = +\infty$$

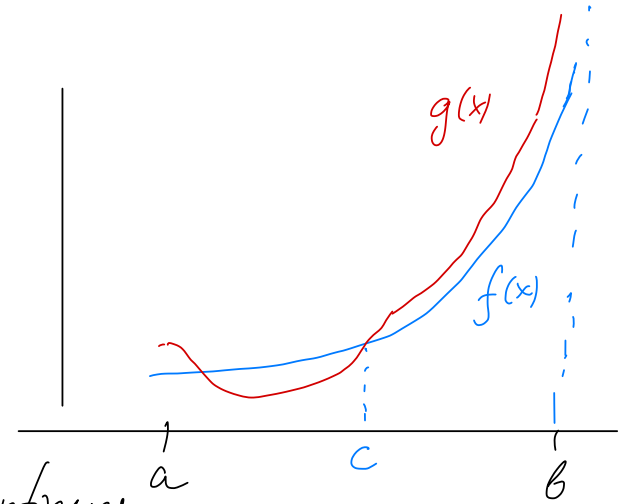
L'intégrale généralisée $\int_{0+}^1 \frac{dx}{x}$ diverge



Proposition. Critère de comparaison. Soient $f, g :]a, b[$ fonctions continues telles qu'il existe $c \in]a, b[: 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in]c, b[$

Alors si $\int_a^{b-} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{b-} f(x) dx$ converge
(la limite finie existe)

si $\int_a^{b-} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{b-} g(x) dx$ diverge



Il existe un critère similaire pour $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

$$\text{Ex. } \int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \stackrel{\alpha \neq 1}{=} - \int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u^\alpha} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{-\alpha+1} u^{-\alpha+1} \Big|_x^{b-a} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} \left((b-a)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} \right) =$$

Changement de variable

$$u = b-t \Rightarrow du = -dt$$

$$t = a \Rightarrow u = b-a, \quad t = b- \Rightarrow u = 0+$$

$$\left[\frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, \quad \alpha < 1 \right. \\ \left. \text{divergente}, \quad \alpha > 1 \right]$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \int_a^{b-} \frac{dt}{b-t} = - \int_{b-a}^{0+} \frac{du}{u} = \int_{0+}^{b-a} \frac{du}{u} = \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(b-a) - \ln x) = +\infty \text{ divergente}$$

$$\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \text{divergente}, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Corollaire Soit $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot (b-x)^\alpha = \ell \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Dém: Soit $\ell > 0$; $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \Rightarrow \exists c \in]a, b[: \forall x \in [c, b[$ on a
 $\frac{1}{2} \ell \leq \underbrace{(b-x)^\alpha}_{>0} f(x) \leq \frac{3}{2} \ell \Rightarrow \frac{\ell}{2} \frac{1}{(b-x)^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2} \frac{1}{(b-x)^\alpha} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Par le critère de comparaison $= \int_a^b f(t) dt$ est convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$
divergente $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$ ▣

D'une façon similaire on obtient: Soit $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)(x-a)^\alpha = \ell \neq 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Ex. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge ou diverge? (la primitive ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^3}} = \ell \neq 0$ ↙ on veut $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$

il faut prendre $\alpha = \frac{1}{2}$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ par le corollaire $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ converge

Déf Soit $a < b$, $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $c \in]a, b[$ arbitraire

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b-} f(t) dt \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{b-} f(t) dt \text{ converge si et seulement si}$$

les deux intégrales généralisées convergent. La définition ne dépend pas du choix de $c \in]a, b[$.

Ex. $\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} + \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$

(1) On cherche $\alpha_1 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot x^{\alpha_1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\alpha_1}}{x^r(1-x)^s} = l \neq 0$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha_1 = r$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^r}{x^r(1-x)^s} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1/2} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow r < 1$$

(2) On cherche $\alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)(1-x)^{\alpha_2} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)^{\alpha_2}}{x^r(1-x)^s} = l \neq 0$$

$\Rightarrow$ il faut prendre $\alpha_2 = s$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(1-x)^s}{x^r(1-x)^s} = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_{1/2}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s} \text{ converge} \Leftrightarrow s < 1$$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1-} \frac{dx}{x^r(1-x)^s}$$

converge $\Leftrightarrow$

$r < 1$ et $s < 1$

Intégrales généralisées sur un intervalle non borné.

-254-

Déf. Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t)dt$ dit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ si la limite existe. (un nombre réel)

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t)dt$ est divergente.

Soit $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ dit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$ si la limite existe. (un nombre réel).

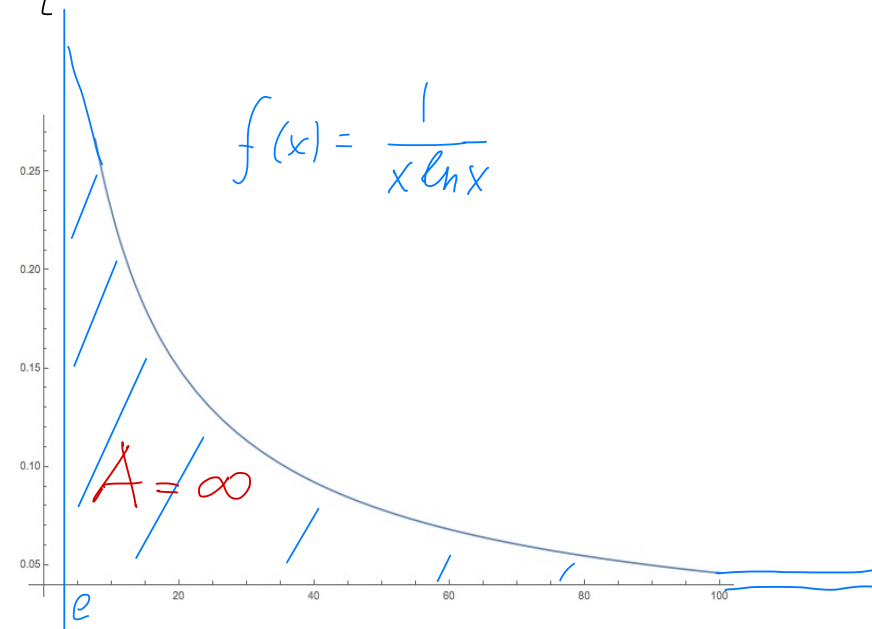
Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est divergente.

Ex 1. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e, +\infty[$

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u} =$$

$u = \ln t$
 $du = \frac{1}{t} dt$; $\ln e = 1$, $\ln x = y \rightarrow \infty$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln u \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = \infty \Rightarrow \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} \text{ diverge}$$

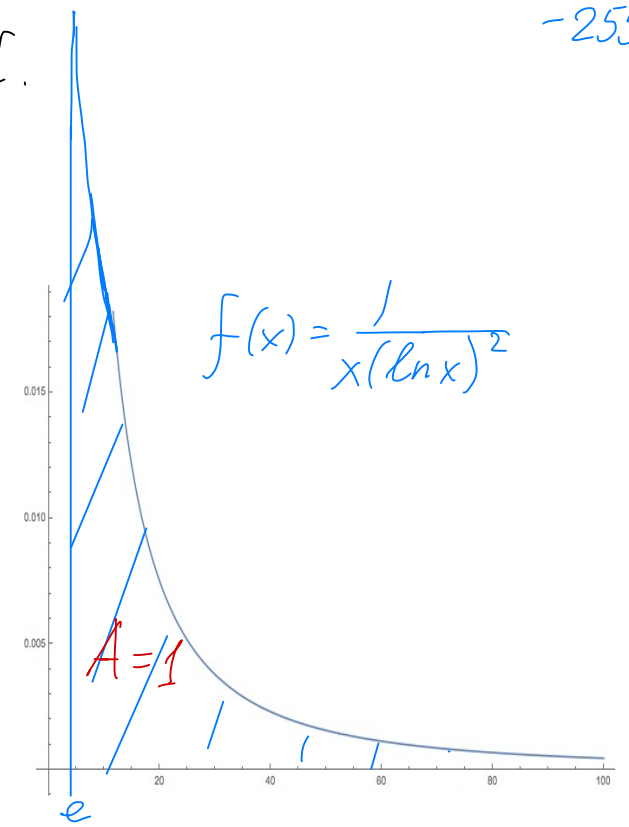


Ex 2. L'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, $x \in [e, \infty[$.

$$\int_e^{\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{du}{u^2} =$$

$u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$
 $t = e \Rightarrow u = 1, t = x \Rightarrow u = \ln x = y \rightarrow \infty$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{y} + 1 \right) = 1$$



Critère de comparaison. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout

$x > c$ pour un certain $c > a$, Alors

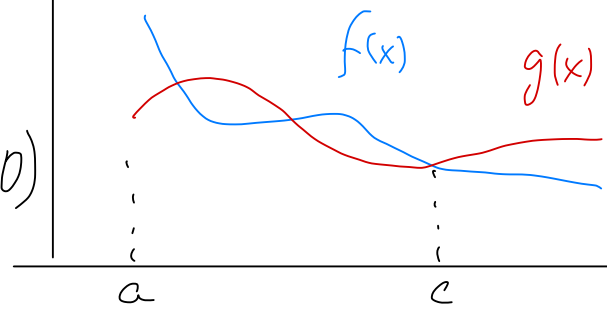
si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ converge ; si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx$ diverge.

Ex. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}}$ $\beta \neq 1$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^{\beta}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} (R^{1-\beta} - 1) =$$

$= \begin{cases} = -\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{\beta-1} & \text{si } \beta > 1 \\ \text{diverge, } \beta < 1 \end{cases}$

Si $\beta = 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R - 0) = \infty$
 divergente



$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \frac{1}{\beta-1}, \text{ si } \beta > 1$$

divergente, si $\beta \leq 1$

à comparer
avec

$$\int_{0+}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1$$

divergente, $\alpha \geq 1$

Corollaire Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^{\beta} = \ell \neq 0$
 $\ell \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^{\infty} f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$
diverge $\Leftrightarrow \beta \leq 1$

Ex. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge ou diverge? (ne s'exprime pas en fonctions élémentaires)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta}}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta}}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$$

pour avoir une limite $\neq 0 \neq \infty$, il faut $\beta = \frac{3}{2}$

l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge.

Déf Soit f une fonction continue sur $]a, +\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{a+}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt \quad \text{pour un } c \in]a, \infty[$$

converge si et seulement si les deux intégrales généralisées convergent.

Sinon, l'intégrale généralisée $\int_{a+}^{\infty} f(t) dt$ diverge.

Déf Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors on peut aussi considérer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{\infty} f(t) dt, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ qui est convergente si et seulement si les deux int\'egrales convergent.}$$

La d\'efinition ne d\'epend pas du choix de $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$ convergente? $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{\alpha}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 1$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ par le Corollaire l'int\'egrale $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx$ diverge

Directement: $\int_{0+}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{h \rightarrow 0+} \int_h^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{h \rightarrow 0+} (-\cot x) \Big|_h^{\pi/2} = \lim_{h \rightarrow 0+} \left(\underbrace{-\cot(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{\cot(h)}_{\rightarrow +\infty} \right) = \infty$ diverge

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Exercice. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = ?$ calculer l'int\'egrale g\'en\'eralis\'ee si elle converge.

Crit\'ere de comparaison $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^{\beta}}{x^2 + 4x + 9} = l \neq 0, \neq \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 9} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ il faut $\beta = 2 > 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx$ converge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_c^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \int_c^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$D=16-36<0$

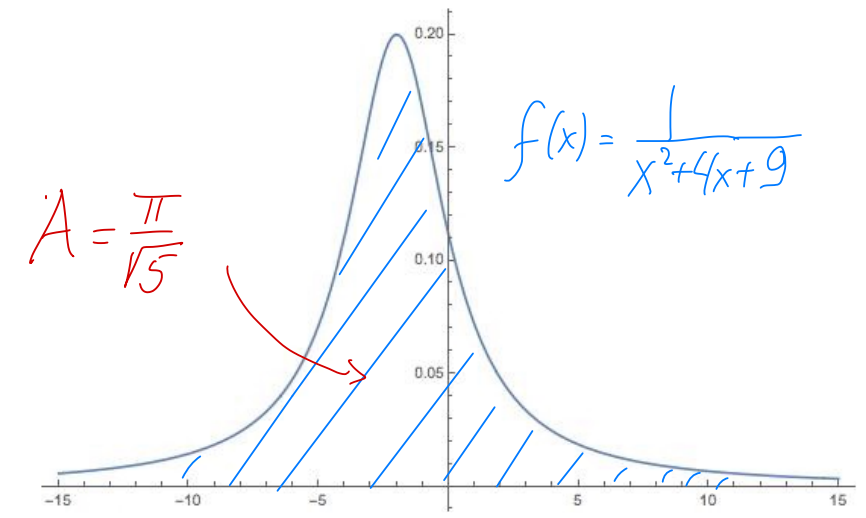
Changement de variable
 $u = \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{5}} dx$
 $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow u \rightarrow \pm\infty$
Soit $c=-2 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow u=0$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_R^0 \frac{du}{u^2+1} + \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^S \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_R^0 + \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u \Big|_0^S = \lim_{R \rightarrow -\infty} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan R \right) + \lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan S - 0 \right) =$$

$\searrow -\frac{\pi}{2} \qquad \searrow \frac{\pi}{2}$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$



Question 26

L'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} e^{-x}(x^2+3x-1)dx$ vaut

A. ne converge pas

B. -4

C. -5

D. 4

E. 5

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x}(x^2+3x-1) dx$$

La primitive: $\int \underbrace{e^{-x}}_{g'_1(x)} \underbrace{(x^2+3x-1)}_{f_1(x)} dx = -\underbrace{e^{-x}}_{g'_2(x)} \underbrace{(x^2+3x-1)}_{f_2(x)} - \int \underbrace{-e^{-x}}_{g'_2(x)} \underbrace{(2x+3)}_{f_2(x)} dx =$

$g'_1(x) = e^{-x} \Rightarrow g_1(x) = -e^{-x}$ $g_2(x) = e^{-x}$

$$= -e^{-x}(x^2+3x-1) - e^{-x}(2x+3) + \int e^{-x} \cdot 2 dx =$$

$$= -e^{-x}(x^2+3x-1) - e^{-x}(2x+3) - 2e^{-x} = -e^{-x}(x^2+5x+4) + C$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x}(x^2+3x-1) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{-x}(x^2+5x+4) \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R}(R^2+5R+4) + 4) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^2+5R+4}{e^R} + 4 \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2R+5}{e^R} + 4 \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e^R} + 4 \right) = 4. \end{aligned}$$