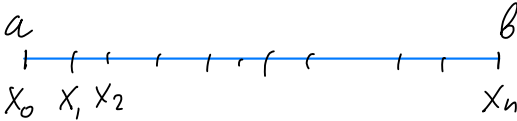


Chapitre 7. Calcul intégral.

Intégrale d'une fonction continue.

Déf. Sommes de Darboux. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
continue

$\sigma =$ subdivision de $[a, b]$



Soit $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$

Ex. σ régulière d'ordre $n =$

Pas de subdivision $P(\sigma) = \max \{x_i - x_{i-1}\}$

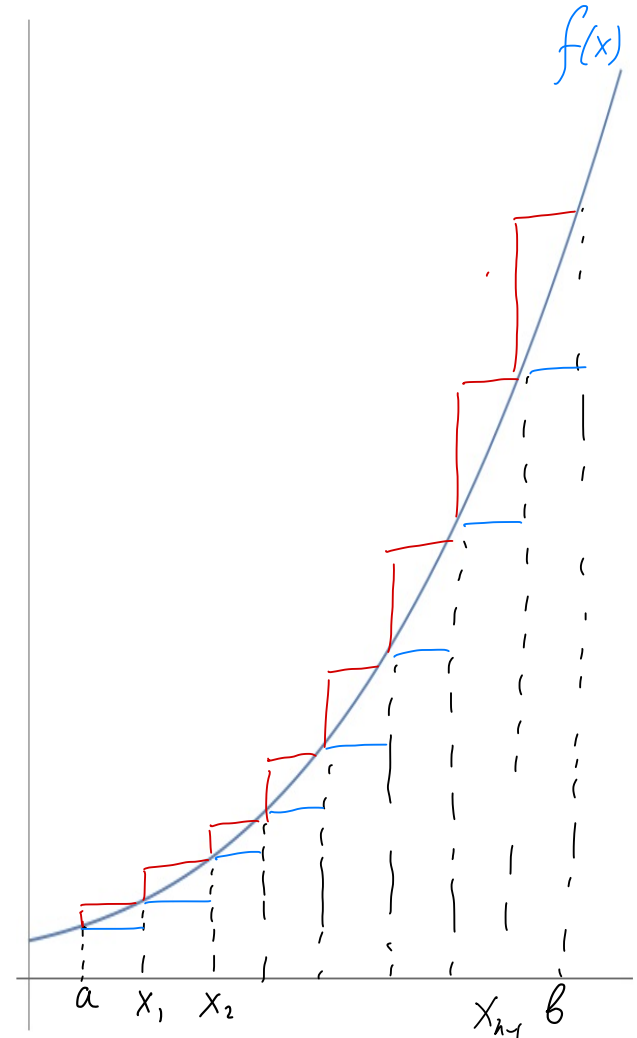
Alors $\boxed{\bar{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})}$ où $M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

est la somme de Darboux supérieure de f
relativement à σ

$\boxed{\underline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})}$ où $m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$

est la somme de Darboux inférieure de f
relativement à σ

$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \bar{S}_\sigma(f) \leq M(b-a), \quad M = \max_{[a, b]} f(x), \quad m = \min_{[a, b]} f(x)$$



$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a),$$

Remarque. Si $\sigma_1 \subset \sigma_2 \leftarrow$ on ajoute des point

$$\Rightarrow \underline{S}_{\sigma_1}(f) \leq \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f)$$

Proposition. Soit $\overline{S}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \overline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivision de } [a,b] \}$

$$\underline{S}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \underline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ subdivision de } [a,b] \}$$

Théorème Alors si f est continue sur $[a,b]$, $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$

Déf $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a < b$. Alors

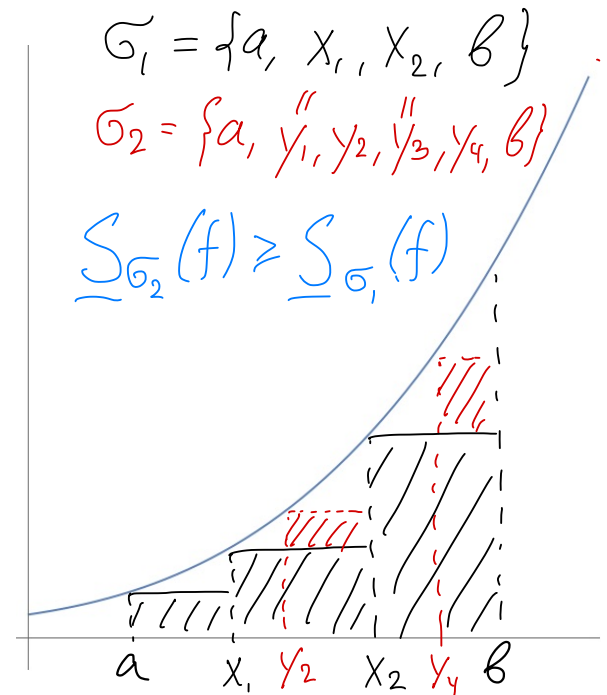
borne sup $\rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

borne inf $\rightarrow$

variable d'intégration

est l'intégrale de Riemann
de la fonction f sur $[a,b]$



[Voir DZ §9.1.5]

Déf. Si $b < a$ $\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{dét}}{=} - \int_b^a f(x) dx$; $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Calcul d'intégrale: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f)$, où $\{\sigma_n\}$ est une suite de subdivisions de $[a, b]$ telle que $\mathcal{I}(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ex $\int_0^3 x dx$ $\sigma_n = \{0, \frac{3}{n}, 2 \cdot \frac{3}{n}, \dots, (n-1) \frac{3}{n}, 3\}$, $x_k = k \cdot \frac{3}{n}$, $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n} \quad \forall k=1 \dots n$

$\max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = x_k = \frac{3k}{n}$; $\min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = x_{k-1} = \frac{3(k-1)}{n}$

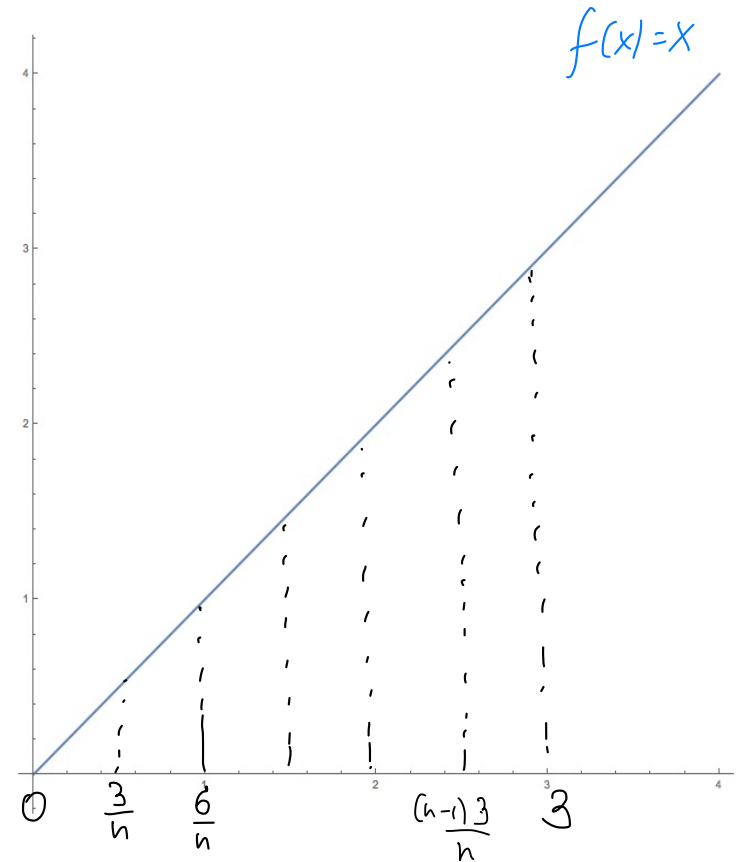
$$\overline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3k}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{9n(n+1)}{2n^2}$$

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{3(k-1)}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{9n(n-1)}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n+1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\sigma_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n(n-1)}{2n^2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 x dx = \frac{9}{2} \quad \text{☺}$$

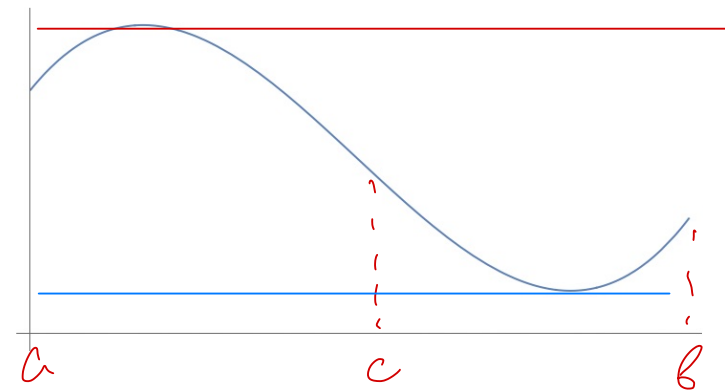


Propriétés (1) $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$.
 Soit $c \in (a, b) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

$$(2) m(b-a) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq M(b-a)$$

$$\text{où } m = \min_{[a, b]} f(x) \quad M = \max_{[a, b]} f(x)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



(3) Théorème de la moyenne: $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$

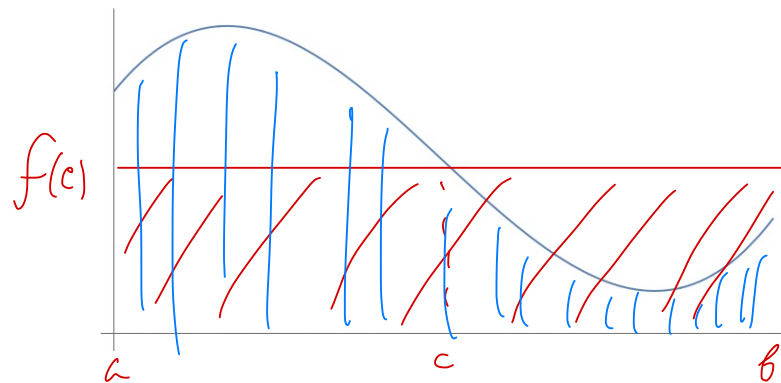
Alors il existe un point $c \in (a, b)$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Dém: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \text{ où}$$

$$m = \min_{[a, b]} f(x) \quad , \quad M = \max_{[a, b]} f(x)$$



f est continue $\Rightarrow$ Par TVI sur $[a, b]$ $\exists c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$



Relation entre l'intégrale et une primitive de f sur $[a, b]$.

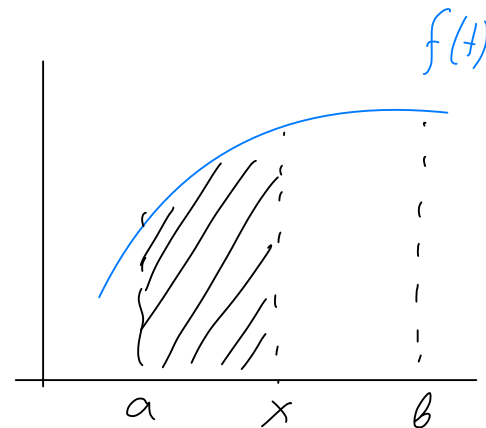
Rappel: Une primitive $F(x)$ d'une fonction continue $f(x)$ sur $[a, b]$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $F'(x) = f(x) \forall x \in]a, b[$. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$ alors $F_1(x) - F_2(x) = C, C \in \mathbb{R} \forall x \in [a, b]$.

Proposition. Soit $a < b$, f_x une fonction continue sur $[a, b]$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$ telle que $F(a) = 0$

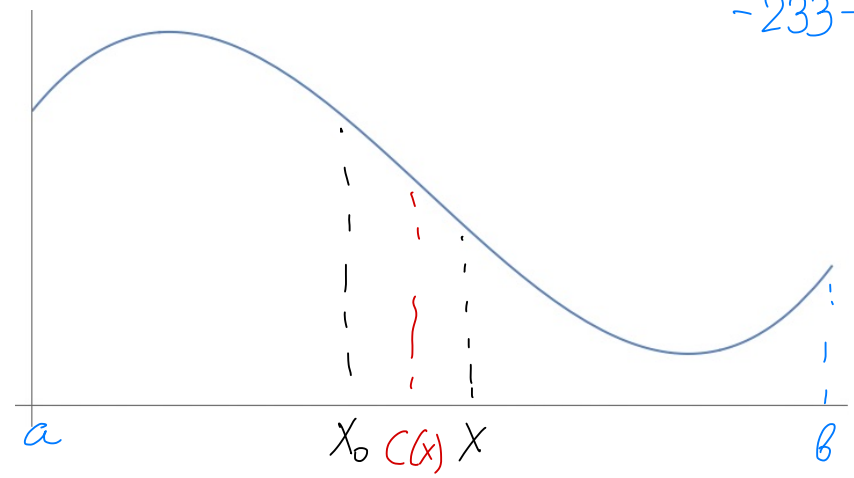
Dém: Soit $x_0 \in]a, b[$

Considérons
$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) =$$



$$\frac{1}{x-x_0} \left(\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) =$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t)dt \right) = \underset{\text{Thm de la moyenne}}{\color{red}f(c(x))} \text{ où } c(x) \text{ est entre } x_0 \text{ et } x$$



$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ c(x) \rightarrow x_0}} \underset{\text{f continue}}{f(c(x))} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in]a, b[.$$

exercice

Il faut aussi démontrer que $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) = 0$ $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b)$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \overbrace{(x-a)}^{\rightarrow 0} \overbrace{f(c(x))}^{\rightarrow f(a)} = 0 = F(a)$$

$c(x) \text{ entre } a \text{ et } x$

[DZ §9.1.13]



Corollaire Théorème fondamental du calcul intégrale.

-234-

Soit $a < b$, $f(x)$ continue sur $[a, b]$. Si $G(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$

alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Dém: On sait que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[a, b]$ t.g $F(a) = 0$

Alors $F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow G(b) - G(a) = F(b) - F(a) =$

$$= \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} = \int_a^b f(t) dt$$

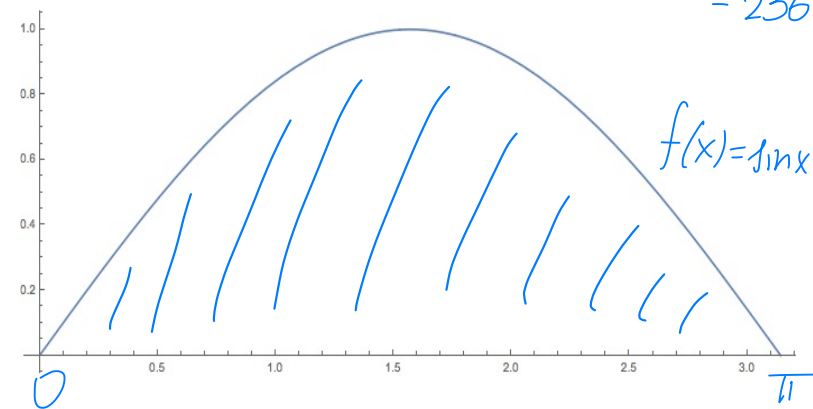
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et $F(x)$ est une primitive de f sur $[a, b]$



$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + C$
$\sinh x$	$-\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x + C$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Ex. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$
 $= 1 + 1 = 2$

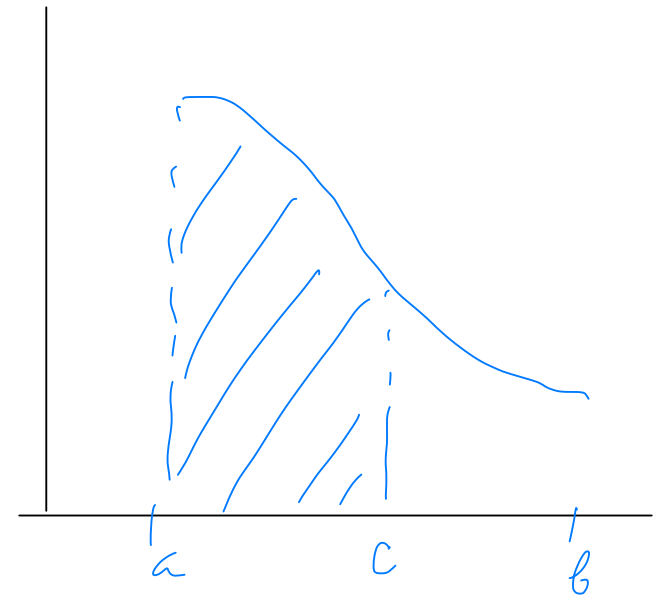


Propriétés (1) Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$
 puisque $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

(2) Si $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$, $c \in]a, b[$

$\Rightarrow 0 \leq \int_a^c f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx$ parce que

$F'(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est croissante sur $[a, b]$
 et $F(a) = 0$



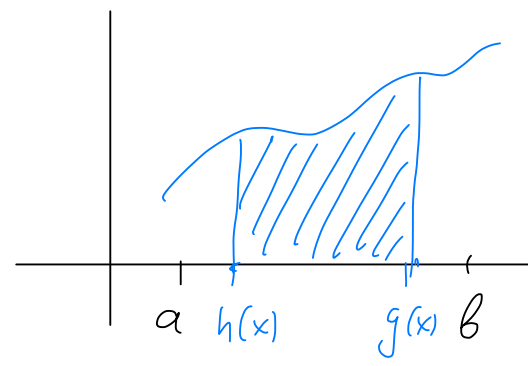
$\Rightarrow$ Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ et si $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$

(3) Corollaire: Si: $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(4) Intégrale fonction de ces bornes.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $g, h: I \rightarrow [a, b]$ dérivables sur I

Alors
$$\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$



Dém:
$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \int_{h(x)}^a f(t) dt + \int_a^{g(x)} f(t) dt = \int_a^{g(x)} f(t) dt - \int_a^{h(x)} f(t) dt = F(g(x)) - \cancel{F(a)} - F(h(x)) + \cancel{F(a)} = F(g(x)) - F(h(x))$$

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = \left(F(g(x)) - F(h(x)) \right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) - F'(h(x)) \cdot h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$



Ex.
$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{3x^2+3} e^{t^2} dt \right) = e^{(3x^2+3)^2} \cdot (6x) - \underbrace{e^1 \cdot (1)'}_{=0} = 6x e^{(3x^2+3)^2}$$

Techniques d'intégration.

Proposition Formule de changement de variable.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ continûment dérivable sur $I \supset [\alpha, \beta]$

Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad \text{où } x = \varphi(t)$$

Ex 1. 1^{ère} méthode $\int_1^2 x e^{x^2} dx = \int_1^4 \cancel{\sqrt{t}} e^t \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{t}}} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e)$

Soit $x = \sqrt{t} = \varphi(t) : \underset{\alpha}{[1, 4]} \rightarrow \underset{\beta}{[1, 2]}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Ex 2. 2^{ème} méthode $\int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (e^4 - e)$

Soit $u = x^2 \Rightarrow du = (x^2)' dx = 2x dx$ $x \in [1, 2] \rightarrow u \in [1, 4]$

$$u = f(x) \Rightarrow du = (f'(x)) dx \quad \frac{du}{dx} = (u(x))'$$

Example.

$$\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_9^4 \sqrt{u}' (-du) = \int_4^9 \sqrt{u}' du =$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{Soit } u = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{u}$$

$$x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow u = 1 + \frac{1}{\frac{1}{8}} = 9$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow u = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 4$$

$$= \int_4^9 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}$$

Question 24.

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1+\sqrt{x+1}} dx \quad \text{vaut}$$

A. $\ln 3 - \ln 2$

B. $\arctan(2)$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\ln \frac{9}{4}$

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1+\sqrt{x+1}} dx = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} dx =$$

$$\text{Soit } y = \sqrt{x+1} \Rightarrow dy = (\sqrt{x+1})' dx = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$$

$$x \in [0, 3] \Rightarrow y = \sqrt{x+1} \in [1, 2]$$

$$= \int_0^3 \underbrace{\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}}_{\frac{2}{y+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx}_{dy} = \int_1^2 \frac{2 dy}{y+1} = 2 \ln(y+1) \Big|_1^2 = \\ = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = \ln 9 - \ln 4 = \ln \frac{9}{4}.$$