

Rappel: Series entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Proposition Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

(1) Supposons que $a_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

(2) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty$, alors $r = \frac{1}{\ell}$.

← marche aussi avec $\limsup$.

Generalisation de (2): Critère de Cauchy généralisé.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est une série numérique telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ conv abs.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ div.

ou si $\sqrt[n]{|x_n|}$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ div.

Corollaire: pour les séries entières

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ une série entière ; alors

si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, $0 \leq \ell \leq +\infty$

← si $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas bornée

Alors le rayon de convergence $r = \frac{1}{\ell}$.

Exemple $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, n impair ; $a_n = \frac{1}{n}$, n pair.
Trouver le rayon de convergence.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \ell \Rightarrow r = \frac{1}{\ell} = 1. \text{ le rayon de convergence}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ n'existe pas

Remarque. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \leadsto \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\alpha}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x \cdot \frac{\alpha}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\alpha}{x} \ln x} \quad e^x \text{ est continue} \Leftrightarrow$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha \ln x}{x} \stackrel{BL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\alpha}{x}} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

§6.2. Série de Taylor.

Soit $f: \underset{\text{ouvert}}{I} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(I)$ (indéfiniment dérivable), et $x_0 \in I$.

Alors $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ est la série de Taylor de f au point x_0 .

Si $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

est la série de MacLaurin.

2 Questions: (1) Trouver le rayon et le domaine de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$.

(2) Trouver l'ensemble $E \subset D$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$
 (E est l'ensemble où la série de Taylor converge vers $f(x)$)

Rappel: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ u est entre x et x_0

$$\begin{array}{ccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \text{polynôme de Taylor} & \downarrow n \rightarrow \infty \\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k & + & ? \end{array}$$

$\nwarrow R_n(f)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \text{ converge vers } f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)(x) = 0$$

Ex 1. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}, E = D = \mathbb{R}$.

Ex 2. $f(x) = \ln x \Rightarrow f \in C^\infty(]0, +\infty[)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \dots f^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{x^k}$$

$$| \quad x=1$$

$$\Rightarrow \text{Taylor}(\ln x)_{x=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

$$\text{Si } x-1 = y \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow \text{MacLaurin}(\ln(1+y))_{y=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

Rayon de convergence: pour $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow D \supset]0, 2[$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge, série harmonique}$$

$$\text{Si } x=2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ converge, harmonique alternée}$$

$$\Rightarrow D =]0, 2]$$

-222-

(2) $E = ?$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{u^{n+1}} \cdot n! \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{u} \right|^{n+1}$ $0 < x \leq 2$
 difficile

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1}$

Si $x=2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{1}{u} \right|^{n+1} = 0 \Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \dots \dots 2 \in E$

On verra plus tard que $D = E =]0, 2]$.

Ex 3. $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$ Série de MacLaurin donnée par la série géométrique
 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad D = E =]-1, 1[\quad ; \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x}$

Ex 4. $f(x) = \sinh x \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}), f'(x) = \cosh x, f''(x) = \sinh x, f^{(3)}(x) = \cosh x, \dots$
 $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$

MacLaurin ($\sinh x$) = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Critère de d'Alembert: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R}$

(2) $E = ?$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pm(\sin u) \text{ ou } \pm(\cos u)}{(n+1)!} \right| |x|^{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ -223-

$\Rightarrow E = D = \mathbb{R}$

Remarque: Critère de d'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

D'une façon similaire
on trouve:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Et aussi:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Remarque. Exemple de la série de Taylor (f) qui converge, mais pas vers la fonction $f(x)$.

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ indéfiniment dérivable autour de $x=0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \pm \lim_{|x| \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|} = \pm \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-1/2}} = \pm \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1/2}}{e^t} \stackrel{BL}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{t^{1/2} e^t} = 0$$

$$t = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \Rightarrow f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2}{e^t} = 0$$

D'une manière similaire on trouve $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$

$\Rightarrow f$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \text{Taylor}(f)_{x=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors $\text{Taylor}(f)_{x=0} \neq f(x)$ sauf pour $x=0$.

$$D = \mathbb{R} \quad ; \quad E = \{0\}.$$

§6.3. Primitives et dérivée d'une fonction définie par une série entière.

Déf. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est une primitive de f sur $[a, b]$ si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$.

Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur $[a, b]$, alors

$$F_1(x) = F_2(x) + \alpha \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

(puisque $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ sur $]a, b[\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \alpha$)

Ex.

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos x + C$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$f(x) = x^k \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \quad k \neq -1, \quad x > 0$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x + C$$

Théorème (1) Les deux séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ ont le même rayon de convergence r .

(2) Si $r > 0$, alors $f(x) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ est continue sur $]x_0-r, x_0+r[$

(3) Si $r > 0$, alors $F(x) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ est la primitive de $f(x)$ sur $]x_0-r, x_0+r[$ telle que $F(x_0) = 0$.

(DZ, §8.3).

Corollaire. Les deux séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence. r

Si $r > 0$, alors $f(x) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est continûment dérivable sur $]x_0-r, x_0+r[$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$.

Ex. $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \forall z \in]-1, 1[$. Soit $x = 1-z \Rightarrow z = 1-x$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2[\Rightarrow$ le rayon de convergence $r = 1$

Considérons $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \stackrel{\text{😊}}{=} \text{Taylor}(\ln x)_{x=1}$ -227-

Par le Thm, la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ est la primitive de $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{x}$ et les 2 séries ont le même rayon de convergence = 1.

$$F(x) = \left(\text{la primitive de } \frac{1}{x} \right) = \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \quad \forall x \in]0, 2[$$

t.g. $F(1)=0$

On a déjà vu que $\text{Taylor}(\ln x)_{x=1}$ converge vers $\ln 2$ pour $x=2$

$\Rightarrow$ Donc on a pour $f(x) = \ln x$: $E = D =]0, 2]$

Finalement:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k, \quad x \in]0, 2]$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k, \quad x \in]0, 2[$$

On note que les domaines de convergence de deux séries sont différents dans ce cas, mais les rayons de convergence sont toujours les mêmes.

Question 23

Trouver la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ telle que la limite $\alpha \in \mathbb{R}$ existe et calculer α .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x+x^2) - \ln 3 - ax}{x^2} = \alpha$$

A. $a = 1, \alpha = \frac{1}{3}$

B. $a = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{5}{18}$

C. $a = 1, \alpha = \frac{1}{18}$

D. $a = \frac{1}{3}, \alpha = -\frac{1}{18}$

E. $a = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{7}{18}$

$$\begin{aligned} \ln(3+x+x^2) &= \ln\left(3\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3}\right)\right) = \\ &= \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3}\right) = \ln 3 + \ln(1+y) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x+x^2) - \ln 3 - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\ln 3} + \ln(1+y) - \cancel{\ln 3} - ax}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y - \frac{1}{2}y^2 + \tilde{\varepsilon}(y)y^2 - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \tilde{\varepsilon}(x)x^2 - ax}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{18}x^2 + \tilde{\varepsilon}(x)x^2 - ax}{x^2} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad \frac{5}{18}x^2 = \frac{5}{18} = \alpha$$