

Rappel: Si $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) > 0$, n pair $\Rightarrow$ loc min en $x=c$
 $f^{(n)}(c) < 0$, n pair $\Rightarrow$ loc max en $x=c$
 Si $f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$, n impair $\Rightarrow$ point d'inflexion

Développement limité: $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x=a$

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}_{P_f^n(x-a) - \text{la partie principale}} + \underbrace{(x-a)^n E(x)}_{R_f^n(x-a) \text{ le reste}} - \text{le DL d'ordre } n \text{ de } f \text{ autour de } x=a.$$

$\lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0.$

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x} = \underbrace{1+x+x^2+\dots+X^n}_{P_f^n(x)} + \underbrace{X^n(x+x^2+\dots)}_{= \frac{x}{1-x} = E(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} = 1+x+x^2+\dots+X^n + X^n \cdot E(x)$
 autour de $x=0$

Proposition Si $f: E \rightarrow F$ est n fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant $x=a$, alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de f autour de $x=a$.

Opérations algébriques sur les DL.

Proposition Soient $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant le DL autour de $x=a$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n E_1(x) = P_f^n(x) + (x-a)^n E_1(x) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n E_2(x) = P_g^n(x) + (x-a)^n E_2(x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} E_1(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} E_2(x) = 0 \end{array} \right.$$

Alors: (1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$P_{\alpha f + \beta g}^n(x) = \alpha P_f^n(x) + \beta P_g^n(x)$$

(2) $f(x) \cdot g(x)$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$(x-a)^{n+1} = (x-a)^n \cdot \overbrace{(x-a)}^0$$

$$P_{f \cdot g}^n(x) = P_f^n(x) P_g^n(x) = (a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n)(b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n)$$

où on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$

(3) Si $b_0 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ sur E , $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$

$$\frac{P_f^n(x)}{P_g^n(x)} = \frac{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}{b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n}$$

où on ne retient que les termes d'ordre $\leq n$.

Ex. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ DL d'ordre 4 autour de $x=0$.

$$(1) \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{DL} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\frac{1}{1-(-x)}} = \frac{1}{2} (1 + \cancel{x} + x^2 + \cancel{x^3} + x^4 + x^4 \mathcal{E}_1(x)) + \frac{1}{2} (1 - \cancel{x} + x^2 - \cancel{x^3} + x^4 + x^4 \mathcal{E}_2(x)) =$$

$$= \underline{1 + x^2 + x^4 + x^4 \mathcal{E}_3(x)}$$

$$(2) \frac{1}{1-x^2} = \underbrace{\frac{1}{1-x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x}} = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 \mathcal{E}_1(x)) (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4 \mathcal{E}_2(x)) =$$

$$= 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^4} (-\cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^4}) + (x^2 + \cancel{x^3} + \cancel{x^4}) (-\cancel{x^3} - \cancel{x^4}) + x^4 + \mathcal{E}(x) \cdot x^4 = \underline{1 + x^2 + x^4 + x^4 \mathcal{E}(x)}$$

$$(3) \frac{1}{1-x^2} \xrightarrow{\text{division}} \begin{array}{r} \frac{1}{1-x^2} \\ - \frac{x^2}{1-x^2} \\ \hline x^2 - x^4 \\ - \frac{x^4}{x^2 - x^4} \\ \hline x^4 - x^6 \end{array} \quad \left| \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} \rightarrow \underline{1 + x^2 + x^4 + x^4 \mathcal{E}(x)} \right.$$

$$(4) \text{Coefficients indéterminés} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + x^4 \mathcal{E}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \mathcal{E}(x) x^4) (1-x^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_0 x^2 - a_1 x^3 - a_2 x^4 + \widehat{\mathcal{E}(x)} x^4 = \underline{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1: \quad a_0 = 1 \\ x: \quad a_1 = 0 \\ x^2: \quad a_2 - a_0 = 0 \\ x^3: \quad a_3 - a_1 = 0 \\ x^4: \quad a_4 - a_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 = 1 = a_2 = a_4 \\ a_4 = a_3 = 0. \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{1 + x^2 + x^4 + \mathcal{E}(x) x^4}$$



Proposition. DL d'une fonction composée.

-211-

Soit $f(x) = a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n E_1(x)$ - DL autour de $x=a$

$g(y) = g(0) + b_1 y + \dots + b_n y^n + y^n E_2(y)$ - DL autour de $y=0$.

Alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n autour de $x=a$,

$$P_{g \circ f}^n(x) = g(0) + b_1(P_f^n(x-a)) + b_2(P_f^n(x-a))^2 + \dots + b_n(P_f^n(x-a))^n \text{ où on ne conserve que les termes d'ordre } \leq n$$

[DZ § 6.4.12]

(5) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $g(y) = \frac{1}{1-y}$ $f(x) = x^2 \leftarrow$ DL de f autour de $x=0$

$$\Rightarrow g(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + E_1(y)y^4 \quad f(x) = x^2 \rightarrow \text{remplacer } y = x^2$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 + x^2 + x^4 + (x^6 + x^8) + \dots + x^4 E(x) = \underline{1 + x^2 + x^4 + E(x)x^4}$$

Application de DL au calcul des limites.

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \frac{1}{1-x})^2}{x \sin x - x^2}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\sinh x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

formules de Taylor

$$x \ln x - x^2 \stackrel{\text{ordre 4}}{=} x \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{E}_4(x) \right) - x^2 = -\frac{x^4}{6} + \mathcal{E}_4(x) \cdot x^4$$

-2/2-

$$e^x - \frac{1}{1-x} \stackrel{\text{ordre 2}}{=} \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \dots - (\cancel{1} + \cancel{x} + x^2 + \dots) = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{E}_2(x)x^2 \Rightarrow \left(e^x - \frac{1}{1-x} \right)^2 = \frac{x^4}{4} + \mathcal{E}_3(x)x^4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e^x - \frac{1}{1-x} \right)^2}{x \ln x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} + x^4 \mathcal{E}_3(x)}{-\frac{x^4}{6} + x^4 \mathcal{E}_4(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} + \mathcal{E}_3(x)}{-\frac{1}{6} + \mathcal{E}_4(x)} = -\frac{3}{2}$$

Exercice 1. Calculer la même limite par la règle Bernoulli - L'Hospital.

Exercice 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}$

L'ordre du dénominateur est 3 $\Rightarrow$ il faut retenir les termes d'ordre jusqu'à 3

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^3 \stackrel{\text{ordre 3}}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 =$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \mathcal{E}_4(x)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \mathcal{E}(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \mathcal{E}(x) \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \mathcal{E}_4(x) \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3 \mathcal{E}_2(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Chapitre 6. Séries entières. [DZ, Chapitre 8]

Rayon de convergence.

Déf L'expression $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ est dite *une série entière*, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Le domaine de convergence $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ converge}\}$

la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $x \in \mathcal{D}$ est définie par la série entière.

Ex 1. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Série entière avec $a_k = \frac{1}{k!}$, $x_0 = 0$

Critère de d'Alembert : $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la série converge $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R}$

Ex 2. $\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x-x_0)^k$ $a > 0$. Critère de d'Alembert:

$\left| \frac{a^{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a^k (x-x_0)^k} \right| = a |x-x_0|$
Si $a |x-x_0| < 1 \Rightarrow$ la série converge
Si $a |x-x_0| > 1 \Rightarrow$ la série diverge
Si $|x-x_0| < \frac{1}{a} \Rightarrow$ la série converge absolument

Si $x = x_0 + \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{a^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ diverge

Si $x = x_0 - \frac{1}{a} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(-\frac{1}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ diverge.

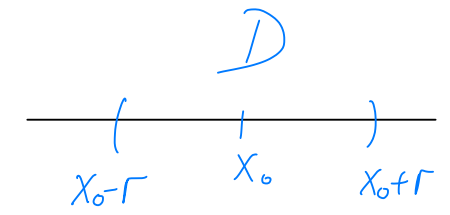
$\Rightarrow \mathcal{D} =]x_0 - \frac{1}{a}, x_0 + \frac{1}{a}[$

Théorème (Rayon de convergence) Soit la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

Alors il existe $r : 0 \leq r \leq +\infty$ tel que

(1) la série converge absolument $\forall x : |x-x_0| < r$

(2) la série diverge $\forall x : |x-x_0| > r$.



Remarques. (1) D est un intervalle qui contient x_0 et centré en x_0 .

(2) La convergence de la série entière en $x = x_0 \pm r$ doit être étudié séparément.

(3) Si $r \neq 0, r \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow D =$ un des 4 intervalles : $]x_0 - r, x_0 + r[$, $[x_0 - r, x_0 + r[$, $]x_0 - r, x_0 + r]$, $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Si $r = 0 \Rightarrow D = \{x_0\}$ Ex : $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ (à vérifier : $D = \{0\}$)

Si $r = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$ Ex : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

Comment calculer le rayon de convergence ?

Proposition. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ une série entière de rayon de convergence r .

Supposons que $a_k \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}$

(1) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}$

on a: $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

(2) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \ell$ avec $0 \leq \ell \leq +\infty \Rightarrow r = \frac{1}{\ell}$.

Idée: (1) Critère de d'Alembert (2) Critère de Cauchy

Soit $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}}{a_k (x-x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|x-x_0|}_{\text{const}} \underbrace{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\rightarrow \ell} = |x-x_0| \cdot \ell \Rightarrow$$

Si $|x-x_0| \cdot \ell < 1 \Rightarrow \text{conv. abs.}$
Si $|x-x_0| \cdot \ell > 1 \Rightarrow \text{div.}$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Si } |x-x_0| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{conv. abs.} \\ \text{Si } |x-x_0| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow \text{div.} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par la déf } r = \frac{1}{\ell} \text{ est le rayon de convergence.}$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} x^n \Rightarrow r = ? \quad D = ?$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow r = 5 \Rightarrow D =]-5, 5[$$

$$x = 5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \text{ diverge}$$

$$x = -5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} (-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 \text{ diverge} \Rightarrow \text{Finalement } D =]-5, 5[$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5^n} x^{3n}$ plusieurs $a_k = 0 \Rightarrow$ on utilise le critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{5^n} |x|^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \underbrace{\sqrt[n]{(n+1)^2}}_{\rightarrow 1} |x|^3 = \frac{|x|^3}{5} \begin{array}{ll} < 1 & \text{conv abs} \\ > 1 & \text{div.} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Si } |x| < \sqrt[3]{5} \text{ conv. abs.}$$

$$\text{Si } |x| > \sqrt[3]{5} \text{ div.}$$

on vérifie facilement que la série diverge pour $x = \pm \sqrt[3]{5}$

$$\Rightarrow D =]-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}[$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 3^n} x^n$. Trouver le rayon de convergence.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3 3^{n+1}} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3 \cdot 3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27 (n+1)(n+\frac{2}{3})(n+\frac{1}{3})}{3 (n+1)(n+1)(n+1)} = 9 \Rightarrow \text{rayon de convergence}$$

$$r = \frac{1}{9}.$$

Question 22

Le développement limité d'ordre 3 autour de $x=0$
de la fonction $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$ est

A. $1 + x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}(x)x^3$

B. $1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + \mathcal{E}(x)x^3$

C. $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \mathcal{E}(x)x^3$

D. $1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}(x)x^3$

E. $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \mathcal{E}(x)x^3$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{E}_1(x)x^3$$

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + \mathcal{E}_2(x)x^3$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \mathcal{E}_3(y)y^3$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{1+x}} = 1 + (x - x^2 + x^3 + \mathcal{E}_2(x)x^3) +$$

$$+ \frac{1}{2}(x - x^2 + x^3 + \mathcal{E}_2(x)x^3)^2 + \frac{1}{6}(x - x^2 + x^3 + \mathcal{E}_2(x)x^3)^3 + \mathcal{E}_4(x)x^3 =$$

$$= 1 + x - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}_5(x)x^3 =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}_5(x)x^3$$
