

Developpements limités. Formule de Taylor.

Théorème (Formule de Taylor). Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $I \ni a$. Alors $\forall x \in I$ il existe u entre x et a tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$P_n(f)$ Polynôme de Taylor

$R_n(f)$ le reste

la formule de Taylor.

Idee: Soit f dérivable sur $I \Rightarrow TAF \forall x, a \in I \Rightarrow \exists u$ entre x et a

tel que
$$f'(u) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$T'_f(x)|_{x=a} = f'(a)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(a) = f'(u)(x-a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(u)(x-a) =$$

$$T''_f(x)|_{x=a} = f''(a)$$

$$= f(a) + \frac{f'(u)}{1!}(x-a)$$

formule de Taylor d'ordre 0

voir [DZ §6.4]

Ex 1. $f(x) = \sin x$ autour de $a=0$; $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x \dots$$

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0 \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$ autour de $a=0$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

Remarque. La formule de Taylor s'appelle la formule de MacLaurin si $a=0$.

Def. (Développement limité) $f: E \rightarrow F$ une fonction définie au voisinage de $x=a$

S'il existe de nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall x \in E, x \neq a$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n E(x),$$

où $E(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0$,

on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de $x=a$.

(DL)

-200-

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n - \text{la partie principale du développement limité (DL)}$$

$$R_n(x) = (x-a)^n \mathcal{E}(x) - \text{le reste du DL.}$$

Proposition. Si $f: E \rightarrow F$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x=a$, alors celui-ci est unique.

Dém: Par absurde Supposons que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_1(x) : \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{E}_1(x) = 0$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_2(x) : \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{E}_2(x) = 0$$

Soit k le plus petit tel que $a_k \neq b_k$

$$0 = \frac{f(x) - f(x)}{(x-a)^k} = \frac{(a_k - b_k)(x-a)^{\cancel{k}} + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a)^{\cancel{k+1}} + \dots + (x-a)^{\cancel{n}}(\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x))}{(x-a)^{\cancel{k}}}$$

$$0 = \underbrace{(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \dots}_{\downarrow x \rightarrow a} + (x-a)^{n-k}(\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x))$$

$$0 = a_k - b_k$$

$\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow a_k = b_k \quad \forall k = 0, \dots, n \Rightarrow \mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$



Corollaire. Soit $a \in I$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I . Alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de la fonction f autour de $x=a$

Dém: Le reste : $\underbrace{f^{(n+1)}(u) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{= \varepsilon(x)(x-a)^n}$ de Taylor - le reste du DL

Il faut vérifier que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n+1)}(u) \frac{(x-a)}{(n+1)!} \stackrel{??}{=} 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| f^{(n+1)}(u) \frac{(x-a)}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a} M \frac{|(x-a)|}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow \text{on a obtenu le DL de } f \text{ autour de } x=a.$$

$$|f^{(n+1)}(u)| \leq M \stackrel{\in \mathbb{R}}{\text{sur } [a, x] \text{ ou } [x, a]}$$

$\nwarrow f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, x], [x, a]$



Remarques (1) En fait, il suffit d'avoir f n fois dérivable sur I pour avoir $f(x) = P_n(x)$ de Taylor $+ (x-a)^n \varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

(2) $f: E \rightarrow F$ peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable (Voir [DZ] exemple 6.4.9).

Conclusion. Soit $f: I \rightarrow F$ n fois dérivable sur I , $a, x \in I$, $x \neq a$

Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur I , alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

u entre
 a et x

C'est le DL de la fonction f d'ordre n autour de $x=a$.

Ex.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x, f^{(k)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^u}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^u}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Etude des fonctions.

-203-

Rappel: Si $f: I \rightarrow F$ est dérivable sur I , et f admet un extremum local en $x=c$, alors $f'(c) = 0$.

Proposition. (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local).

Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , ou $n \in \mathbb{N}^*$ est pair et telle que $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Alors si $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f$ admet un min local en $x=c$

si $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow f$ admet un max local en $x=c$

 $f(x) = x^2$
 $f''(0) = 2$

 $f(x) = -x^2$
 $f''(0) = -2$

Dém: formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x=c$

$$f(x) = f(c) + \underbrace{f'(c)(x-c)}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(c)(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=0} + \frac{f^{(n)}(u)(x-c)^n}{n!} \text{ où } u \text{ est entre } x \text{ et } c.$$

$$\Rightarrow f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(u)(x-c)^n}{n!} \quad \text{Supposons que } f^{(n)}(c) > 0; f^{(n)} \text{ est continue} \Rightarrow f^{(n)}(u) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(c) = \frac{\underbrace{f^{(n)}(u)}_{>0} \underbrace{(x-c)^n}_{>0}}{n!} > 0 \quad \forall x \text{ au voisinage suffisamment petit de } c \Rightarrow f(c) \text{ est un min loc}$$



Def. $f: E \rightarrow F$ une fonction dérivable en $a \in E$

Soit $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ - la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Considérons $\Psi(x) \stackrel{\text{dét}}{=} f(x) - \ell(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Si $\Psi(x)$ change de signe en $x=a$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .

Proposition. (Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion).

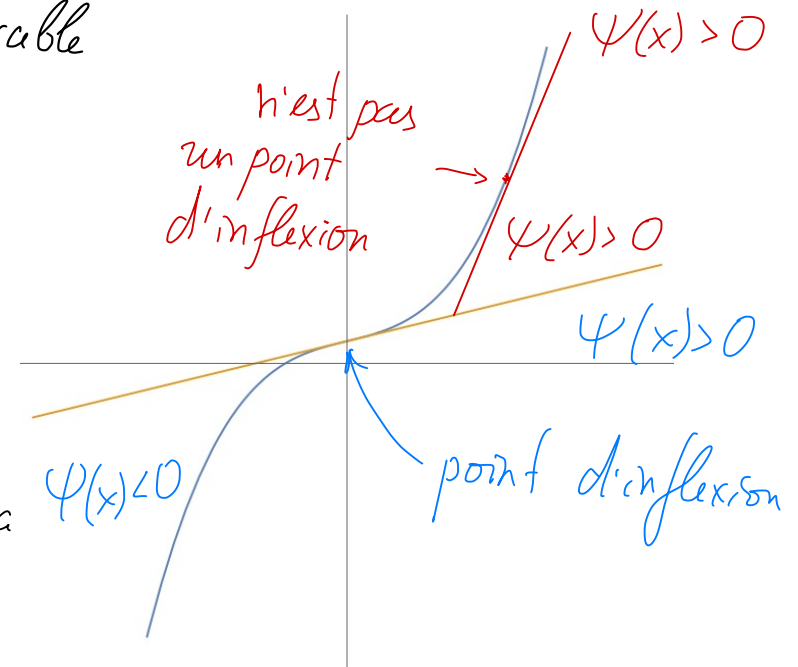
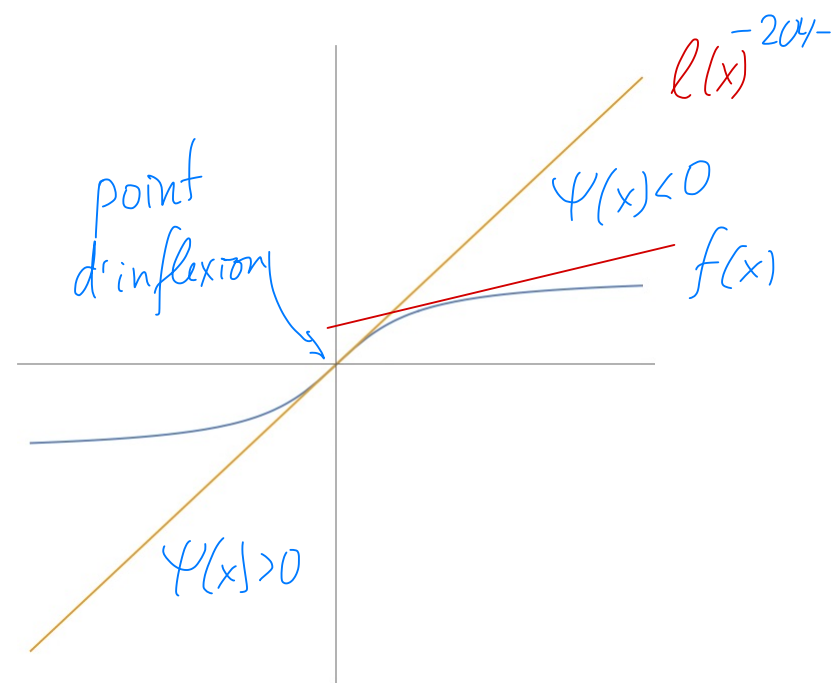
Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}$ est impair, $n > 1$, et on a:

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 ; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .

Dém: Formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x=a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\dots}_{=0} + f^{(n)}(\xi) \frac{(x-a)^n}{n!}$$



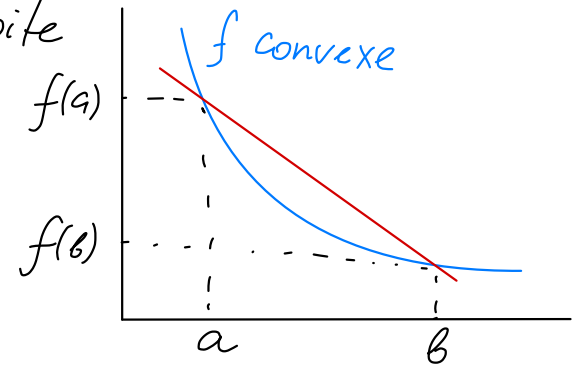
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f^{(n)}(\eta) \frac{(x-a)^n}{n!} \quad \ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\Psi(x) = f(x) - \ell(x) = \cancel{f(a)} + \cancel{f'(a)(x-a)} + f^{(n)}(\eta) \frac{(x-a)^n}{n!} - \cancel{f(a)} - \cancel{f'(a)(x-a)} = f^{(n)}(\eta) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

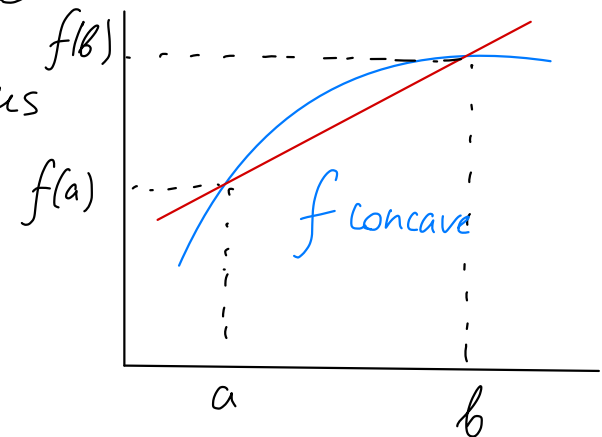
$$\Rightarrow \Psi(x) = \underbrace{f^{(n)}(\eta)}_{>0} \underbrace{\frac{(x-a)^n}{n!}}_{\leftarrow \text{impair}}$$

Soit $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f^{(n)}(\eta) > 0$ puisque $f^{(n)}$ est continue. $\left. \begin{array}{l} \text{change de signe en } x=a \\ \Rightarrow x=a \end{array} \right\} \text{ est un point d'inflexion} \quad \square$

Déf. $f: I \rightarrow F$ est **convexe** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au dessous de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Déf. $f: I \rightarrow F$ est **concave** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au-dessus de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Proposition. Soit $f: I \rightarrow F$ deux fois dérivable sur I .

Alors f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est croissante sur I

f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est décroissante sur I .

Idee: $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = "$

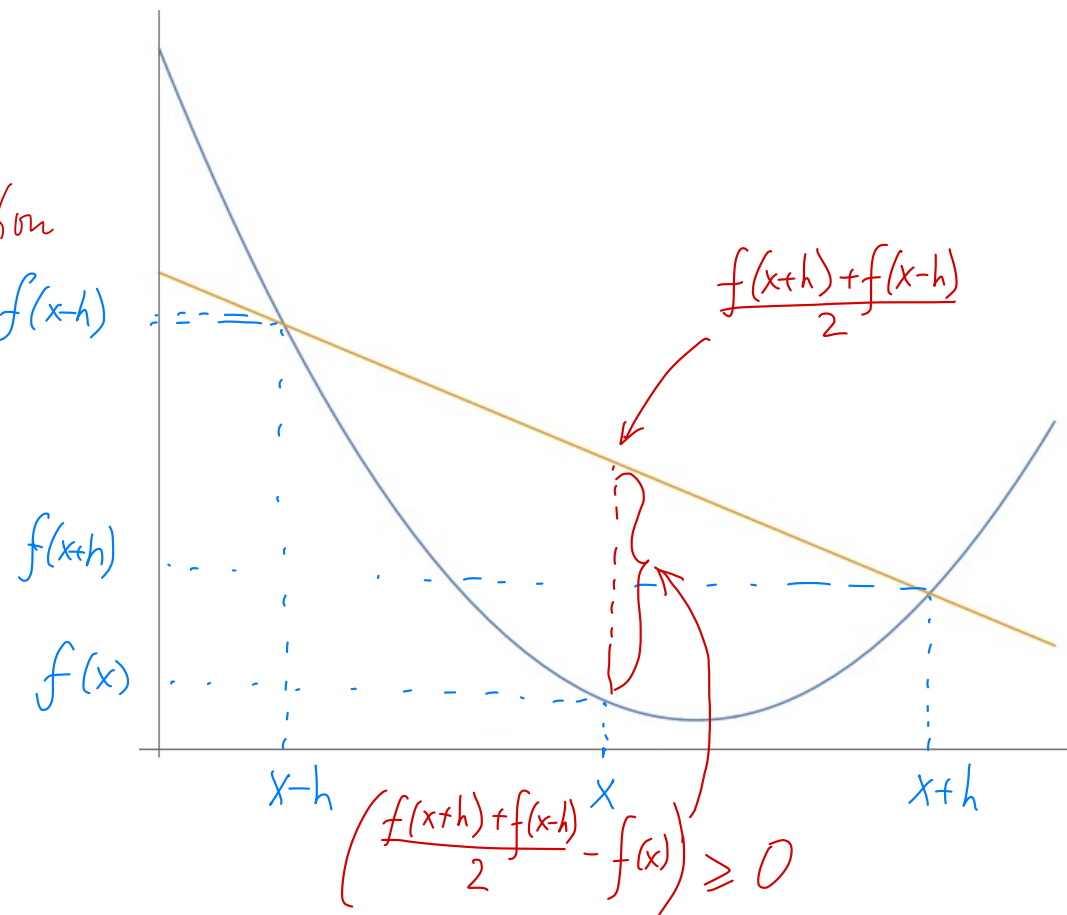
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t = -h, h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x) \right)}{h^2} \begin{matrix} > 0 \forall x \in I \\ \Leftrightarrow \text{la fonction} \\ \text{est convexe} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f(x) \text{ est convexe sur } I$$



Ex. DL pour $f(x) = \frac{1}{1-x}$ d'ordre n autour de $x=0$?
Soit $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{h=0}^{\infty} x^h \quad |x| < 1$$

Exercice: faire par la formule de Taylor
 $\left(\frac{1}{1-x}\right)', \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \dots$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{P_f^n(x)} + \underbrace{x^{n+1} + x^{n+2} + \dots}_{x^n \mathcal{E}(x)}$$

$|x| < 1$

$$x^n \mathcal{E}(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^{n+1} (1 + x + x^2 + \dots) = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{n+1} \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow x^n \mathcal{E}(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \mathcal{E}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{E}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0 \Rightarrow$ On a obtenu le DL de la fonction
 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x=0$ d'ordre n .

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{P_f^n(x)} + \underbrace{x^n \cdot \frac{x}{1-x}}_{x^n \cdot \mathcal{E}(x)} \quad \text{le reste.}$$

Question 21.

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sinh^2 x - x^3}{(1 - \cos x)(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2})}$ vaut

A. -4

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 0

E. n'existe pas

$$\sinh x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}_1(x)x^3$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_2(x)x^2$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{E}_3(x)x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}_1(x)x^3 \right)^2 - x^3}{\cancel{1} \left(\cancel{1} - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_2(x)x^2 \right) \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{E}_3(x)x^3 - \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \widetilde{\mathcal{E}_1(x)}x^4 \right) - x^3}{\left(\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_2(x)x^2 \right) \left(\frac{x^3}{6} + \mathcal{E}_3(x)x^3 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^5 + 2\mathcal{E}_1(x)x^5}{\frac{1}{12}x^5 + \mathcal{E}(x)x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + 2\mathcal{E}_1(x)}{\frac{1}{12} + \mathcal{E}(x)} = -4$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$

$$\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{E}_1(x)x^3 \right)^2 = x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \frac{1}{36}x^6 + 2x^4\mathcal{E}_1(x) - \frac{2}{6}\mathcal{E}_1(x)x^6 + \mathcal{E}_1(x)^2x^6 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \widetilde{\mathcal{E}_1(x)}x^4$$

$x^4 \cdot \widetilde{\mathcal{E}_1(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \widetilde{\mathcal{E}_1(x)} = 0$