

Rappel: Théorème de Rolle.

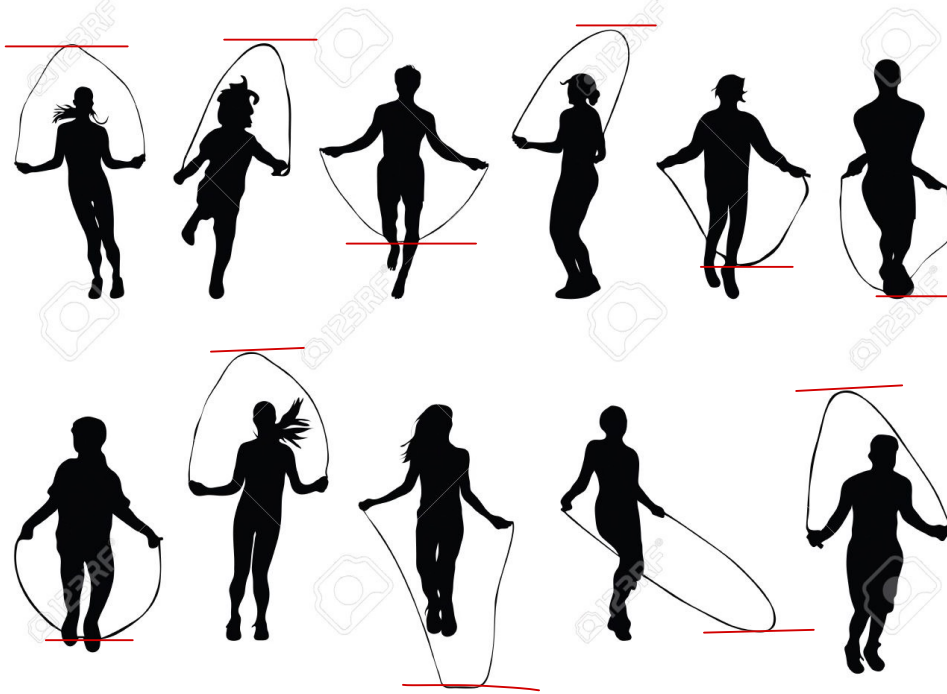
Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$ telle que

(1) $f: [a, b] \rightarrow F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a, b[$

(3) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Il existe toujours
une tangente horizontale
pour une corde suspendue
entre deux points de même hauteur

Remarque Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \alpha$,
où $\alpha = +\infty$ ou $-\infty$ $\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Ex. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\text{bornée}} \cos(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow f \text{ est continue}$

$f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2})$
paire

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \cancel{x^2}(-\sin(\frac{1}{x})) \cdot \cancel{(-\frac{1}{x^2})} =$
 $= 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \quad \forall x \neq 0$

$x=0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x \cos(\frac{1}{x})}_{\text{bornée}} = 0$

$\Rightarrow$ Thm de Rolle est applicable $\Rightarrow \exists c \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: f'(c) = 0$

$f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) = 0 \quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2}{y} \cos y + \sin y = 0 \Rightarrow \tan y = -\frac{2}{y}$
 $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus \{0\} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[= D$

$\Rightarrow$ un nombre infini des solution pour $\tan y = -\frac{2}{y}$ sur D

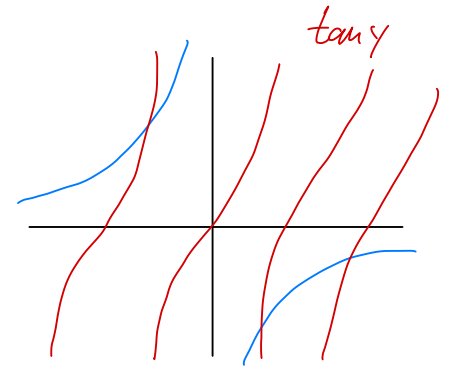
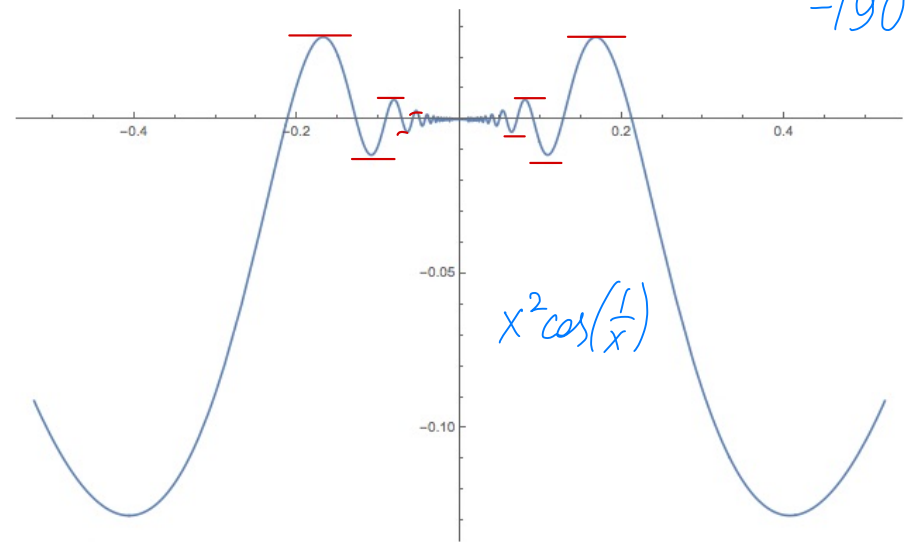
$\Rightarrow$ un nombre infini des solution pour $f'(x) = 0$ sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Remarque. $f(x)$ est un exemple d'une fonction dérivable sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, mais pas de classe $C^1(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$.

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$
Si $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x)$ est continue

Mais $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}))$ n'existe pas $\Rightarrow f'(x)$ n'est pas continue en $x=0$
 $\Rightarrow$ pas de classe $C^1(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$



Théorème des accroissements finis. (TAF)

$a < b$; $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) f est continue sur $[a, b]$

(2) f est dérivable sur $]a, b[$

$\Rightarrow$ Il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque: Si $f(a) = f(b) \Rightarrow$ on retrouve le Thm de Rolle.

Dém: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ $(b, f(b))$

L'équation de cette droite: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

Soit $g(x) \stackrel{\text{dft}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0; g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

$$\Rightarrow g(a) = g(b) = 0$$

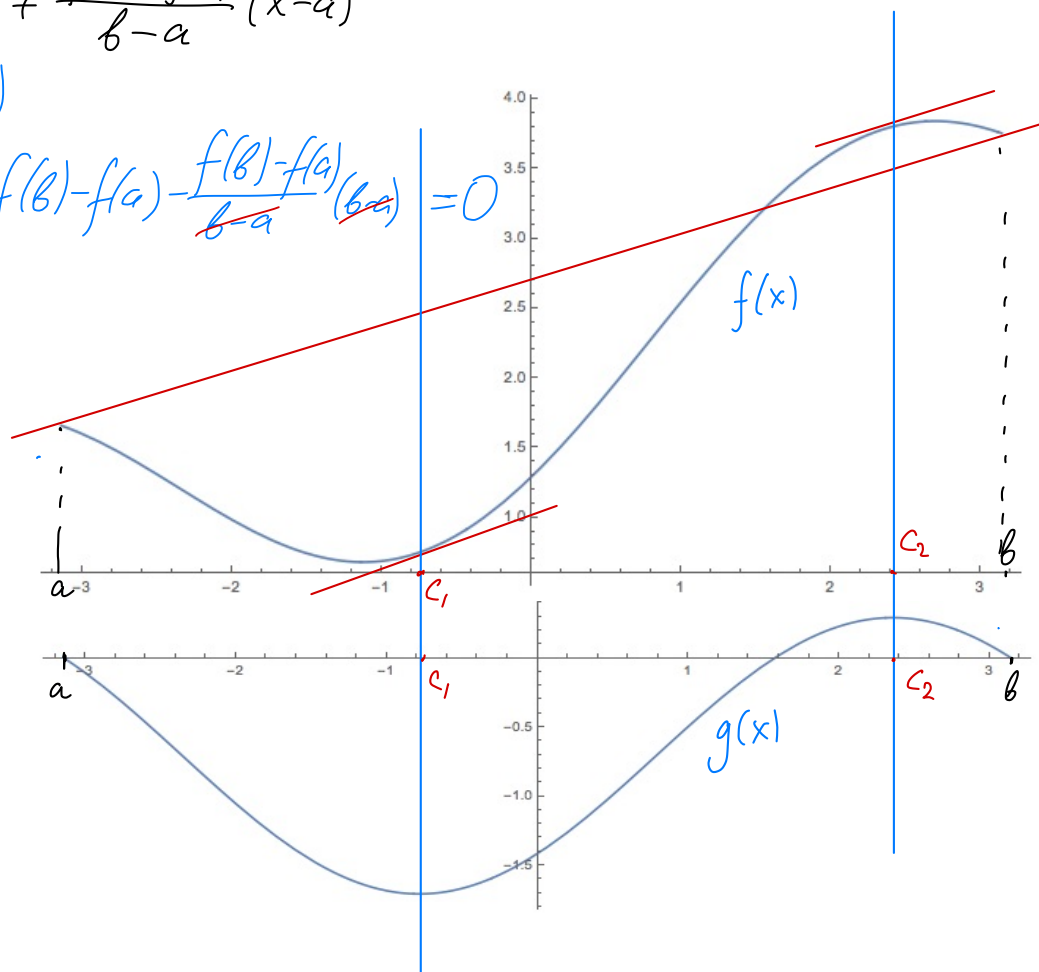
$g(x)$ est continue sur $[a, b]$, dérivable $]a, b[$

$\Rightarrow$ le Thm de Rolle s'applique $\Rightarrow$

$$\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0.$$

$$\Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Corollaire 1 Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Alors f est constante sur $[a, b]$. -192-

Dém: Par contraposée: Supposons $\exists c_1, c_2 \in [a, b] : f(c_1) \neq f(c_2)$

Par TAF $\exists d \in]c_1, c_2[: f'(d) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} \neq 0$ contredit $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ est constante sur $[a, b]$ $\square$

Corollaire 2. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues ^{$[a, b]$} dérivables sur $]a, b[$ et telles que $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Corollaire 3. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ est croissante (décroissante) sur $]a, b[$
 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ est strictement croissante (strictement décroissante) sur $]a, b[$

Dém: (1) $f(x) \uparrow \Rightarrow$ Si $x > c \Rightarrow f(x) \geq f(c) \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$
 $x < c \Rightarrow f(x) \leq f(c) \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$
 $\Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad \forall c \in]a, b[$ f n'est pas décroissante

(2) Soit $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Supposons que $\exists x_1, x_2 \in]a, b[: f(x_1) \geq f(x_2)$
 $\Rightarrow$ par TAF $\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$ contradiction $\Rightarrow f$ est strictement $\uparrow$
 $\Rightarrow$ par TAF $\exists c \in]x_1, x_2[: f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ contradiction $\Rightarrow f$ est croissante. $\square$

Remarque. Si $f(x)$ est strictement croissante, cela n'implique pas que $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a, b[$.
Ex. $f(x) = x^3$ sur $] -1, 1[$ strictement croissante, mais $f'(0) = 0$.

Ex. Démontrer que l'équation $\ln x + e^x = 0$ a exactement une solution réelle, $x > 0$
 $f(x)$ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$.

$$(1) f(e) = \ln e + e^e = 1 + e^e > 0$$

$$(2) f(e^{-5}) = \ln e^{-5} + e^{e^{-5}} = -5 + e^{e^{-5}} < 0 \Rightarrow \text{Par le TVI } \exists \text{ au moins une solution de } f(x) = 0 \text{ sur }]e^{-5}, e[.$$

$$e^{-5} = \frac{1}{e^5} < 1 \Rightarrow e^{e^{-5}} < e < 3$$

f est continue et dérivable sur $]0, \infty[$

Supposons qu'il existe 2 solutions $f(a) = f(b) = 0$, $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[\Rightarrow$ Par le Thm de Rolle $\exists$ un point $c \in]a, b[$:

tel que $f'(c) = 0$. Par contre, $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x > 0 \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow$ il existe au plus une solution de $f(x) = 0$ sur $]0, \infty[$

$\Rightarrow$ Finalement, il existe exactement une solution de $f(x) = 0$ sur $]0, \infty[$.

Théorème. $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

- (1) f, g sont continues sur $[a, b]$
 (2) f, g sont dérivables sur $]a, b[$
 et $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$.

 $\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

[Voir DZ §6.3.1]

§5.4. Règle de Bernoulli-L'Hospital.

Théorème Soient $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$.
 $a < b$

Si (1) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$

(2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(3) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

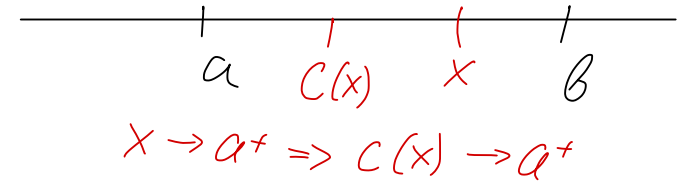
Idée: On considère le cas $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.

Posons $g(a) = f(a) = 0 \Rightarrow f$ et g sont continues à droite en $x = a$

$\Rightarrow$ TAF généralisée sur $[a, x]$ $\forall x \in]a, b[\Rightarrow \exists c(x) : a < c(x) < x$

$$\text{et } \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \frac{f(x) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{limite existe} = \int$$



Remarques. (1) On peut remplacer $\lim_{x \rightarrow a^+}$ par $\lim_{x \rightarrow b^-}$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$.

(2) La non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'implique pas la non-existence de $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sinh x}{x + \sinh x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\cosh x}{x}}{1 + \frac{\sinh x}{x}} \xrightarrow{\frac{0}{0}} 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ n'existe pas!

Soit $a_k = 2k\pi \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(2k\pi)}{1 + \cos(2k\pi)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{2} = 0$, soit $b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ n'existe pas $\Rightarrow$ BL n'est pas applicable.

Aussi, on ne peut pas calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ par BL $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{-\cosh x} = -1$
 parce que (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ n'existent pas

(2) $g(x) = 1 + \cos x = 0$ et $g'(x) = -\sin x$ pour une infinité des points arbitrairement grands

Règle de Bernoulli - L'Hospital

$f, g: \{x \in I, x_0 \neq x\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) f, g dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$
et $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$$

Applications. Ex 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad \alpha > 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x^\alpha} \underset{\alpha > 0}{=} 0 \quad \forall \alpha > 0 \Rightarrow \text{Par BL}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Ex 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{\rightarrow 0}{\text{BL}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Ex 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x))}$

forme indéterminée 1^∞

On considère $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln(\cos(2x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g(x) \neq 0$ au voisinage de $x=0$

$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(x) \neq 0$ au voisinage de $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ BL est applicable
si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

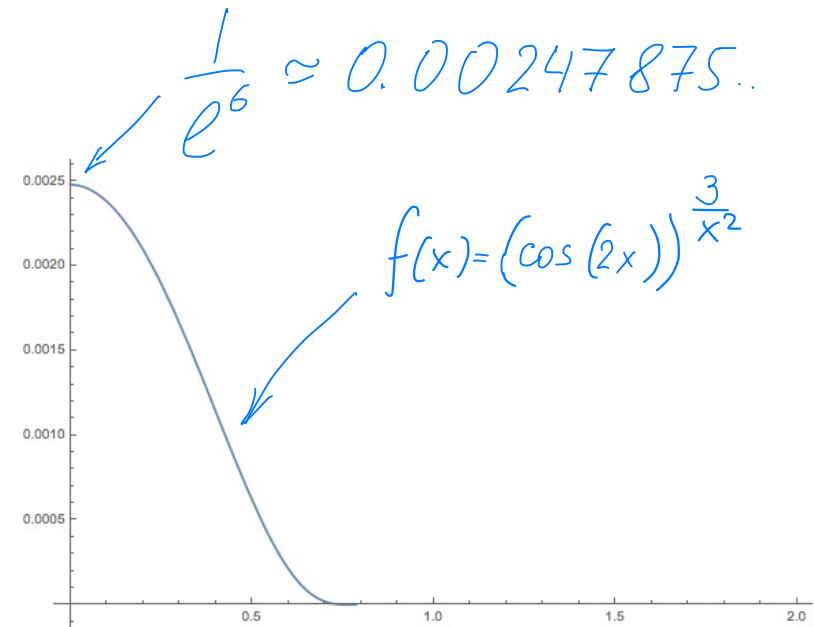
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{\cos(2x)} (-\sin(2x)) \cdot 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{2 \cdot 3 \cdot (-1)}{\cos(2x)}}_{\rightarrow -6} = -6$

$\Rightarrow$ par BL $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = -6$

$\Rightarrow (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{\frac{3}{x^2} \ln(\cos(2x))} \rightarrow e^{-6}$

puisque e^x est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$



Question 20

Soit $f \in C'(\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 1$
et $f'(x) \leq 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Alors nécessairement

$f \in C'(\mathbb{R}) \Rightarrow$ TAF est applicable sur
les intervalles $[x, 1], x < 1$ et $[1, x], x > 1$

$$\text{Soit } x > 1 \Rightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \leq 5$$
$$\Rightarrow f(x) - f(1) \leq 5(x - 1) \quad (x - 1) > 0$$

$$\underline{f(2) \leq 1 + 5 \cdot 1 = 6}, \quad \underline{f(3) \leq 1 + 5 \cdot 2 = 11}$$

$$\text{Soit } y < 1 \Rightarrow \frac{f(1) - f(y)}{1 - y} = f'(d) \leq 5$$
$$\Rightarrow f(1) - f(y) \leq 5(1 - y) \quad (1 - y) > 0$$

$$f(y) \geq f(1) - 5 \cdot (1 - y)$$

$$\underline{f(-2) \geq 1 - 5 \cdot 3 = -14}$$

$$\underline{f(-1) \geq 1 - 5 \cdot 2 = -9}$$

A. $f(3) \leq 10$

B. $f(2) \leq 4$

C. $f(2) > 6$

D. $f(-1) < -10$

E. $f(-1) \geq -9$

F. $f(-2) \geq -8$