

Rappel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad f, g \text{ dérivables en } x_0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad g(x) \neq 0 \text{ au voisinage de } x_0$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad g \text{ dérivable en } f(x_0), f \text{ dérivable en } x_0$$

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; (x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

sur leurs domaines.

Derivée de la fonction réciproque.

Proposition. Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction bijective continue sur I et dérivable en $x_0 \in I$, telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: F \rightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{où } y_0 = f(x_0) ; \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Dém. f est continue et bijective sur $I \Rightarrow f^{-1}$ est continue et bijective

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \left[\begin{array}{l} \text{Changement de variables} \\ x_0 = f^{-1}(y_0), x = f^{-1}(y) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} f^{-1}(y) \text{ est continue en } y_0 \\ \text{Si } y \rightarrow y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) = x \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\exists f'(x_0) \neq 0 \\ \rightarrow f'(x_0)}}} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire. Si $f: I \rightarrow F$ et $f^{-1}: F \rightarrow I$ sont deux fonctions réciproques continues sur leurs domaines et dérivables à l'intérieur, alors pour tout x à l'intérieur de F , tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} \Big|_{y=f^{-1}(x)}$$

Ex. $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\cos x: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$; $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(y)_{y=\arccos x}} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]-1, 1[$$

$\sin y = \pm \sqrt{1-\cos^2 y}$ $0 \leq \arccos x \leq \pi$  $\Rightarrow \sin(\arccos x) > 0 \Rightarrow$ il faut choisir +

Rappel:

$$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x) = e^x$ est continue, bijective, monotone ^{cours 18} $\Rightarrow \exists f^{-1}(x) = \ln x: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
est continue, bijective, monotone

Ex. $f^{-1}(x) = \ln x$ $x > 0$; $f(y) = e^y$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} \bigg|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y} \bigg|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

Remarque. On peut définir les fonctions $a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

$$\Rightarrow y = e^{x \ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \cdot \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \stackrel{\text{def}}{=} \log_a y \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, a > 0, a \neq 1$$

$$\Rightarrow \underline{(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \cdot \ln a}$$

$$\Rightarrow \underline{(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Soit $r \in \mathbb{R}$. Alors $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ $f(x) = x^r \stackrel{\text{def}}{=} e^{r \ln x}$ est la fonction puissance

$$\Rightarrow \underline{(x^r)' = (e^{r \ln x})' = \frac{r}{x} e^{r \ln x} = r x^{r-1}} \quad (\text{si } r=n \Rightarrow (x^n)' = n x^{n-1})$$

$n \in \mathbb{N}$

La dérivée logarithmique.

Question: $(x^x)' = ?$

-181-

Soit $f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} \Rightarrow f'(x) = ?$ $f_1(x)^{f_2(x)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\ln(f_1(x)^{f_2(x)})} = e^{f_2(x) \ln(f_1(x))}$

$$f_1(x) > 0$$

$$(f_1(x)^{f_2(x)})' = (e^{f_2(x) \ln f_1(x)})' = \underbrace{e^{f_2(x) \ln f_1(x)}}_{f_1(x)^{f_2(x)}} \cdot \underbrace{(f_2'(x) \ln(f_1(x)) + f_2(x) \cdot \frac{1}{f_1(x)} \cdot f_1'(x))}_{(\ln f_1(x) f_2(x))'}$$

$$(f_1(x)^{f_2(x)})' = (f_1(x)^{f_2(x)}) \cdot (f_2(x) \cdot \ln f_1(x))'$$

$$f_1(x) > 0$$

Supposons que $\ln f(x)$ est bien défini

Alors $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow$

$$f'(x) = f(x) (\ln f(x))'$$

Ex. $f(x) = x^{x^x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = ?$ $f_1(x) = x$
 $f_2(x) = x^x$

$$x^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln x} \quad x > 0$$

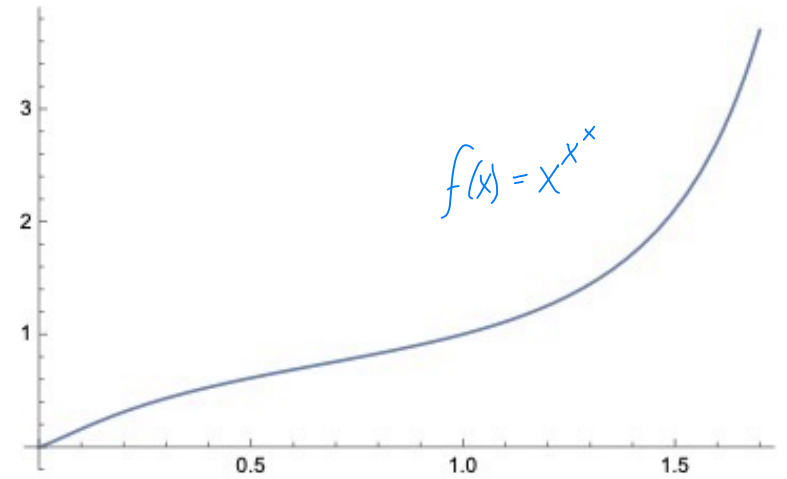
$$x^{x^x} \stackrel{\text{def}}{=} e^{x^x \ln x} = e^{(e^{x \ln x}) \cdot \ln x}$$

$$(x^{x^x})' = (e^{(e^{x \ln x}) \cdot \ln x})' =$$

$$= e^{(e^{x \ln x}) \cdot \ln x} \left(e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x} \right) \cdot \ln x + e^{x \ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \underbrace{e^{(e^{x \ln x}) \cdot \ln x}}_{x^{x^x}} \underbrace{e^{x \ln x}}_{x^x} \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right) = \underline{x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right)}$$

$$(e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = e^{x \ln x} \left(\ln x + \frac{x}{x} \right)$$



Fonctions hyperboliques

Déf.

$$\sinh x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

impaire $\forall x \in \mathbb{R}$

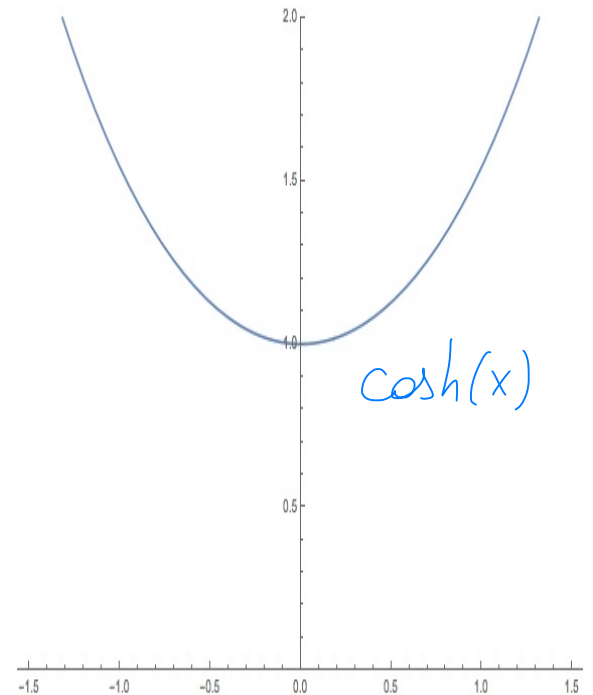
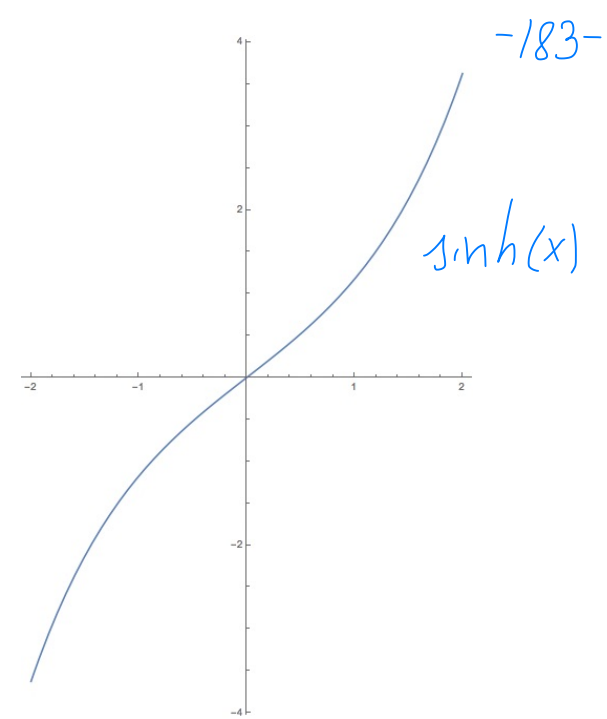
paire $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(\text{Rappel: } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad ; \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1$$

$$\underline{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-1 < \tanh x < 1$$

$$\coth x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

On peut définir des fonctions réciproques :
 „Argument sinus hyperbolique“, ...

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \text{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Bijective

$$y = \sinh x \Leftrightarrow x = \text{arsinh } y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

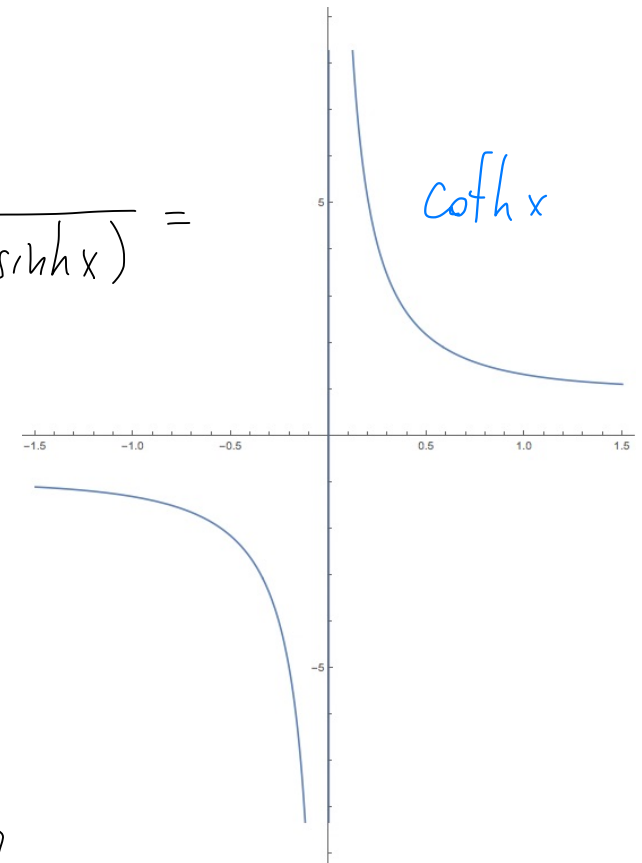
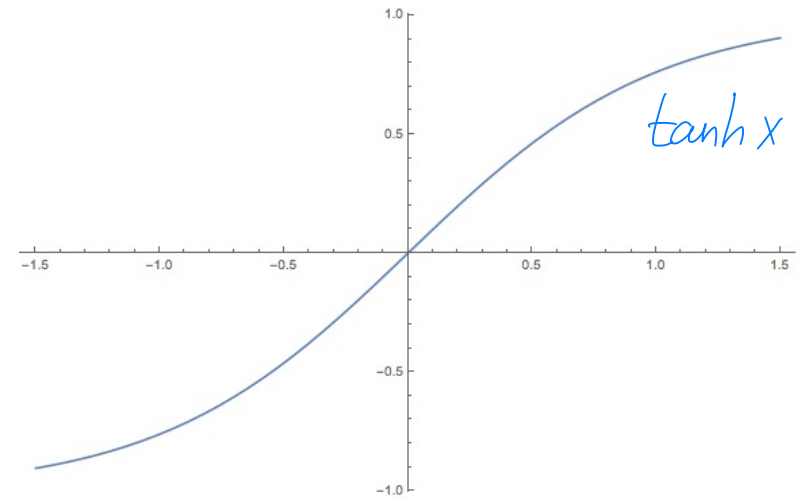
$$(\text{arsinh } x)' = \frac{1}{(\sinh(y))'} = \frac{1}{\cosh(y)} \Big|_{y=\text{arsinh } x} = \frac{1}{\cosh(\text{arsinh } x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\text{arsinh } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\cosh y = +\sqrt{1 + \sinh^2 y} \text{ puisque } \cosh y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$(\text{arsinh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Voir [DZ § 7.5, 7.6]



Déf $f''(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f'(x))'$ dérivée d'ordre 2.

$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (f^{(n-1)}(x))'$ dérivée d'ordre n . Notation : $f^{(n)}(x)$

Ex. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}; f^{(n)}(x) = n!;$
 $f^{(n+1)}(x) = 0$ Exercice: démontrer par récurrence.

Déf. $f: E \rightarrow F$ est n fois dérivable si elle admet une dérivée d'ordre n .

Déf. $f: E \rightarrow F$ est de classe $C^n(E)$ si elle admet une dérivée d'ordre n qui est continue sur E .

„ n fois continûment dérivable ”

Ex $f(x) = \sin x$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\sin x$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$

Polynômes $\in C^\infty(\mathbb{R})$

$f(x) = |x| \in C^0(\mathbb{R})$ seulement continue.

Question 19

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2}-1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1-\cos 4x}{2x}, & x < 0 \end{cases}$

Alors f est

A. continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

B. dérivable, mais pas continûment dérivable sur $\mathbb{R}$

C. dérivable à gauche, mais pas à droite en $x=0$

D. dérivable à droite, mais pas à gauche en $x=0$

E. dérivable à droite et à gauche en $x=0$, mais n'est pas dérivable en $x=0$

F. n'est pas continue en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{2x^2}{x}}_{\rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin^2(2x)}{(2x)^2} \cdot \underbrace{2x}_{\rightarrow 0} = 0$$

$\Rightarrow f$ est continue en $x=0$.

$$f_d'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{2x^2}-1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot 2 = 2$$

$$f_g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1-\cos 4x}{2x} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin^2 2x}{2x^2 \cdot 2} \cdot 2 = 4$$

$\Rightarrow$ E

Théorème des accroissements finis.

-186-

Proposition. Si $f: E \rightarrow F$ dérivable en $x_0 \in E$, telle que f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

Dém: Soit $f(x_0)$ un max local de f . Alors $f(x_0) \geq f(x) \forall x$ dans un voisinage de x_0 .

$$\exists f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x - x_0 > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\leq 0}{=} = f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x - x_0 < 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\geq 0}{=} = 0. \quad \square$$

Remarque. La réciproque est fausse: $f(x) = x^5$ en $x_0 = 0$
 $f'(0) = 0 = 5x^4 \Big|_{x=0} = 0$ mais $f(x)$ n'a pas d'extremum local en $x=0$.

Déf. Si $f: E \rightarrow F$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un point stationnaire de f .

Les points d'extrema d'une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont parmi les suivants:

- (1) les points stationnaires: $f'(x_0) = 0$
- (2) les points où $f'(x)$ n'existe pas dans $]a, b[$
- (3) les points limites $x = a, x = b$.

Théorème de Rolle.

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$, telle que

(1) $f: [a, b] \rightarrow F$ est continue

(2) f est dérivable sur $]a, b[$.

(3) $f(a) = f(b)$.

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dém: (1) Si $f: [a, b] \rightarrow F$ est constante

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \forall x_0 \in]a, b[$$

(2) Si $f: [a, b] \rightarrow F$ n'est pas constante.

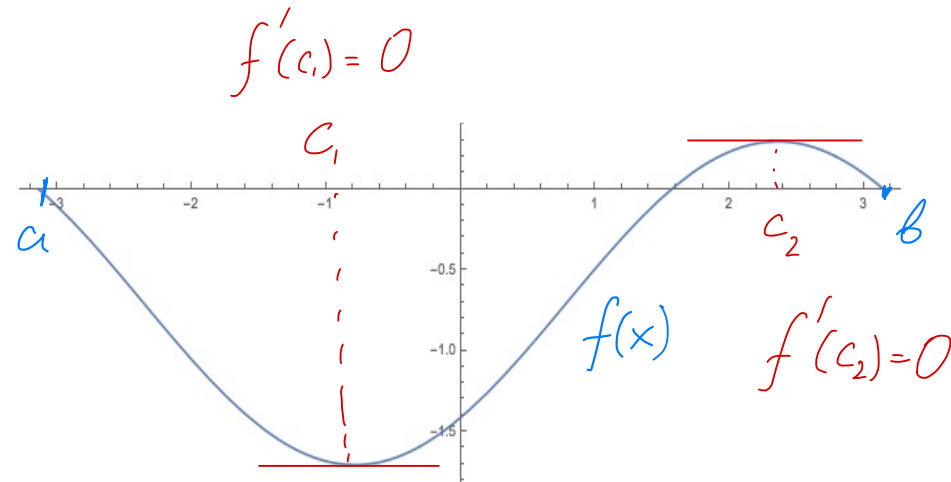
$$\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in [a, b] : f(z_1) = \min_{[a, b]} f(x)$$

$$f(z_2) = \max_{[a, b]} f(x) ; \quad f(z_1) \neq f(z_2)$$

Puisque $f(a) = f(b) \Rightarrow$ au moins un entre z_1 et z_2 est dans $]a, b[$

Supposons que $z_1 \in]a, b[$ $\Rightarrow f'(z_1) = 0$ parce que f est dérivable sur $]a, b[$
 et z_1 est un point d'extremum local

$\Rightarrow$ on pose $c = z_1 \Rightarrow f'(c) = 0. \quad c \in]a, b[$



Ex. (Application Thm de Rolle): Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ ,
telle que $f(0) = f(4) = 0$ et $f'(0) = f'(4) = 0$.

Montrer qu'il existe au moins 2 solutions de l'équation $f''(x) = 0$ sur $]0, 4[$.

(1) $f(0) = f(4)$, $f \in C^\infty \Rightarrow$ Rolle applicable $\Rightarrow \exists c \in]0, 4[: f'(c) = 0$.

(2) $[0, c]$ où $f'(0) = 0$, $f'(c) = 0$, $f \in C^\infty \Rightarrow$ Rolle applicable à $f' \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists a \in]0, c[: f''(a) = 0$.

(3) $[c, 4]$ où $f'(c) = 0$, $f'(4) = 0$, $f \in C^\infty \Rightarrow$ Rolle applicable à $f' \Rightarrow$
 $\exists b \in]c, 4[: f''(b) = 0$.

Alors il existe $a \in]0, c[: f''(a) = 0$ et $b \in]c, 4[: f''(b) = 0$

$a \neq b$ puisque $a \in]0, c[$ et $b \in]c, 4[$.

$\Rightarrow$ il existe au moins 2 solutions
de l'équation $f''(x) = 0$ sur $]0, 4[$.