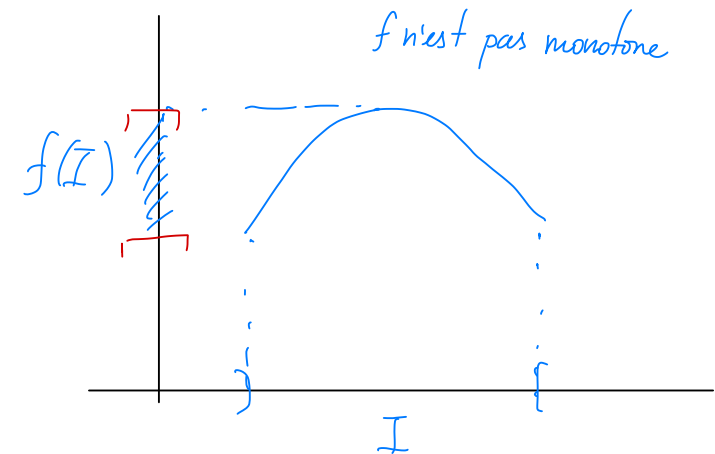
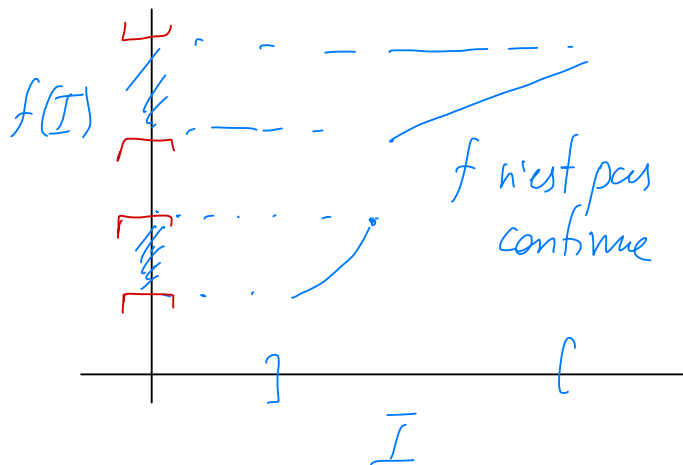
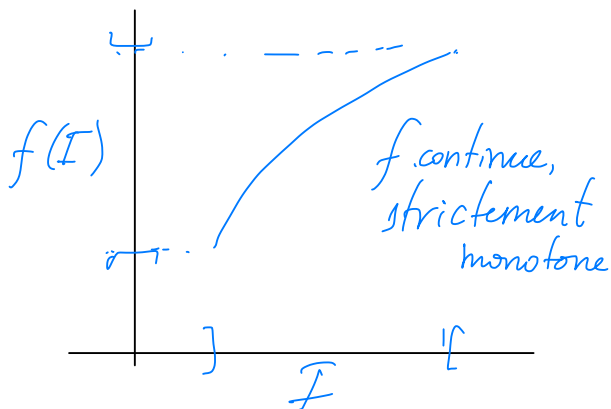


Rappel: Théorème de la valeur intermédiaire: Une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son sup, son inf, et toute valeur comprise entre les deux

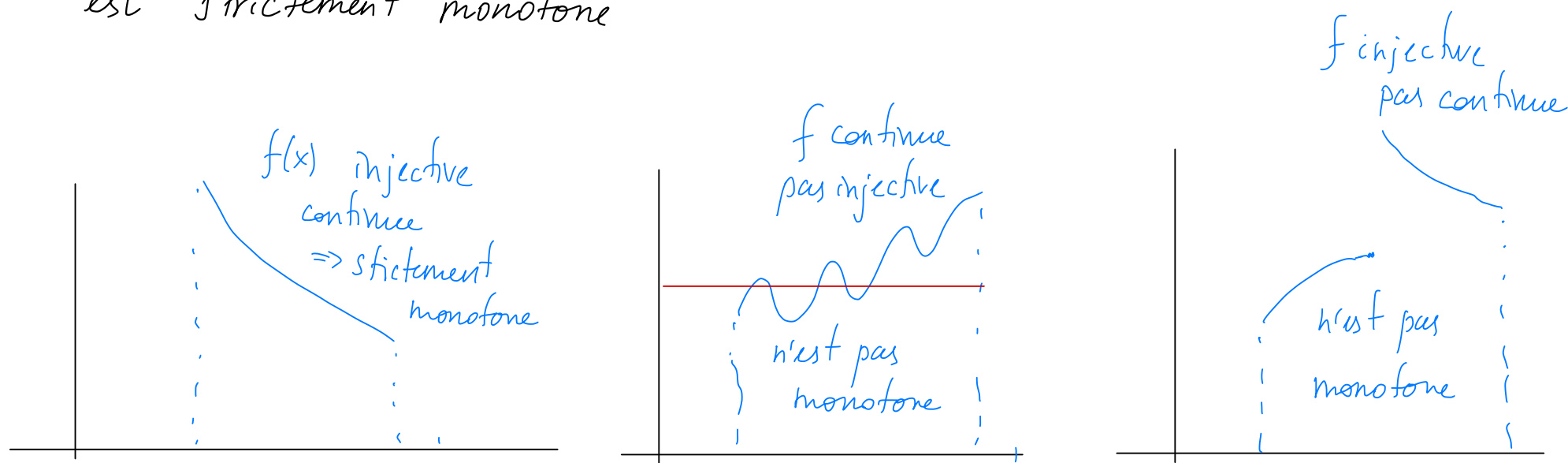
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow \forall c \in [\min_{[a,b]} f(x), \max_{[a,b]} f(x)]$, il existe au moins un $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = c$.

Corollaire 1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un $c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Corollaire 2. Soit I un intervalle ouvert; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.



Corollaire 3. Toute fonction injective et continue sur un intervalle est strictement monotone



Corollaire 4. Toute fonction bijective continue sur un intervalle admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone

[DZ, §5.3]

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \\
 x_1 < x_2 &\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad f \uparrow \text{strictement} \\
 \parallel &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\
 f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) &\Leftrightarrow y_1 < y_2
 \end{aligned}$$

Chapitre 5. Calcul différentiel.

-168-

Fonctions dérivables

Def. Une fonction $f: E \rightarrow F$ est dite **dérivable** en $x_0 \in E$ s'il existe la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(\text{dét})}{=} f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Cette limite est appelée **la dérivée** de f en x_0 , notée $f'(x_0)$.

Ex 1. $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x_0 + (x - x_0)) - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x_0 \cos(x - x_0) - \sin x_0 \sin(x - x_0) - \cos x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{-\sin x_0 \sin(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{\cos x_0 (\cos(x - x_0) - 1)}{x - x_0} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\underbrace{-\sin x_0 \sin(x - x_0)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow 1} + \cos x_0 \underbrace{\left(\frac{-2 \sin^2\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2} \right)}_{\rightarrow -2} \underbrace{\left(\frac{\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2}{x - x_0} \right)}_{\rightarrow 0} \right] = \end{aligned}$$

$$\cos(x - x_0) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \quad = -\sin x_0$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice: $(x^3)' = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ à partir de la déf. -169-

Remarque. Si f est dérivable en $x = x_0$, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \quad \text{où } r(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Alors $r(x)$ est telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0.$

$\Rightarrow$ Toute fonction dérivable en $x = x_0$ admet une présentation

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x) \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

← définition
de f différentiable
en $x = x_0$

Dans ce cas on dit que f est différentiable en x_0 .

Réciproquement, si $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$, t.g. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{f(x_0)} + a(x - x_0) + r(x) - \cancel{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{a \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} + \underbrace{\frac{r(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow 0} \right] = a = f'(x_0).$$

Alors f est différentiable en $x = x_0 \iff f$ est dérivable en $x = x_0$ et $f'(x_0) = a$.

Fonction dérivée : Si $f : E \rightarrow F$ est dérivable sur un ensemble $D(f') \subset E$,

alors on définit la fonction dérivée : $f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
x^2	$2x$
x^n	$n x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

Interprétation géométrique de f'

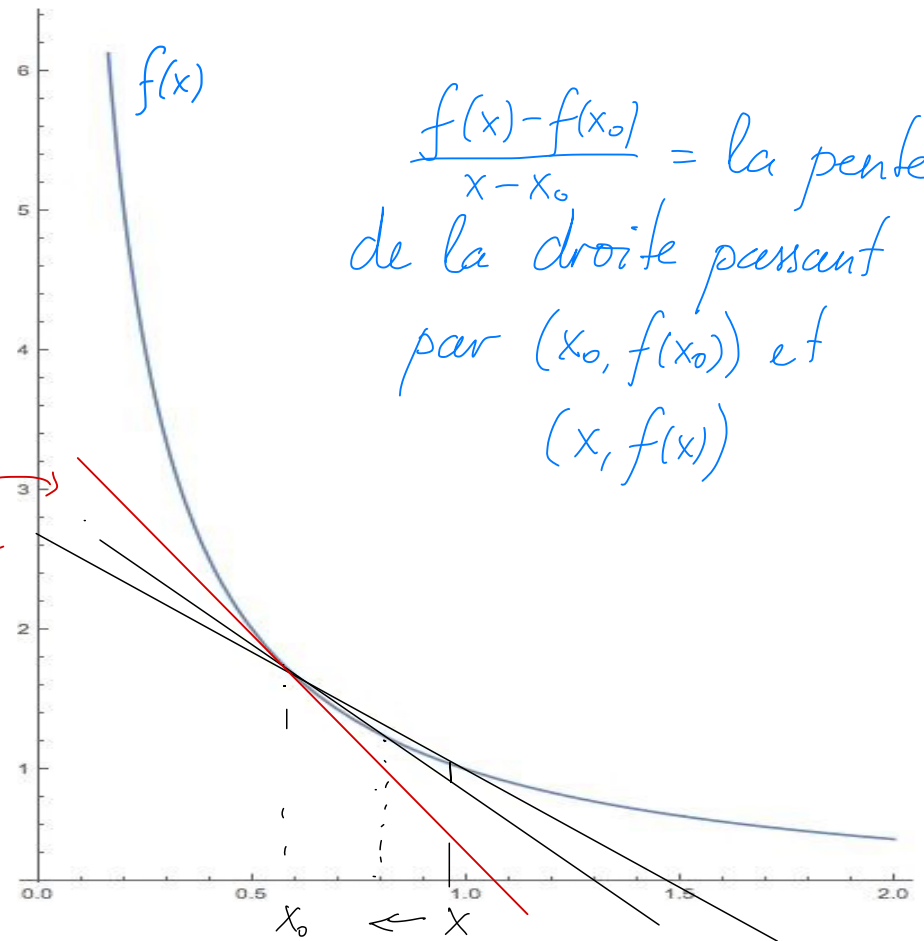
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$

Équation de la tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

droite tangente
à la courbe
 $y = f(x)$
en $x = x_0$



Proposition. Une fonction dérivable en $x=x_0$ est continue en $x=x_0$

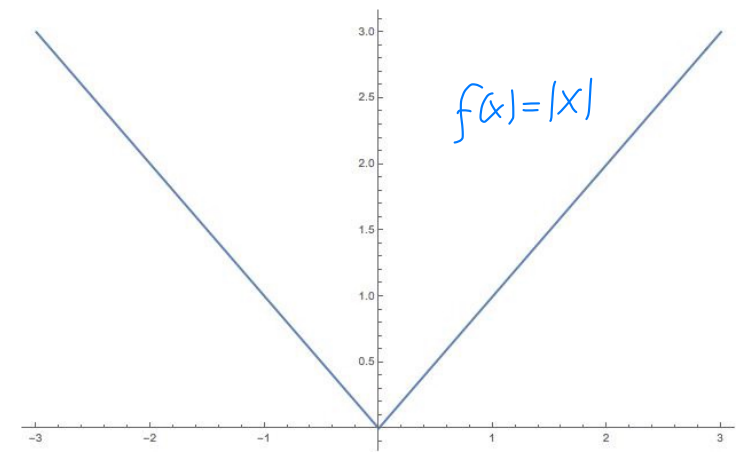
Dém: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + (f(x) - f(x_0))) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0}) = f(x_0)$. 

La réciproque est fautive:

Ex. $f(x) = |x|$ est continue en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0.$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Mais la dérivée de f en $x=0$ n'existe pas.



Déf La dérivée à droite:
 $f_d'(x_0) \stackrel{\text{dét}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

La dérivée à gauche:
 $f_g'(x_0) \stackrel{\text{dét}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f_d'(x_0), \exists f_g'(x_0) \text{ et } f_g'(x_0) = f_d'(x_0).$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_d'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ f_g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \right.$$
$$\Rightarrow f_d'(0) \neq f_g'(0)$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas
 $\Rightarrow f'(0)$ n'existe pas.

Remarque. On peut introduire la dérivée infinie

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

(f n'est pas dérivable en $x = x_0$)

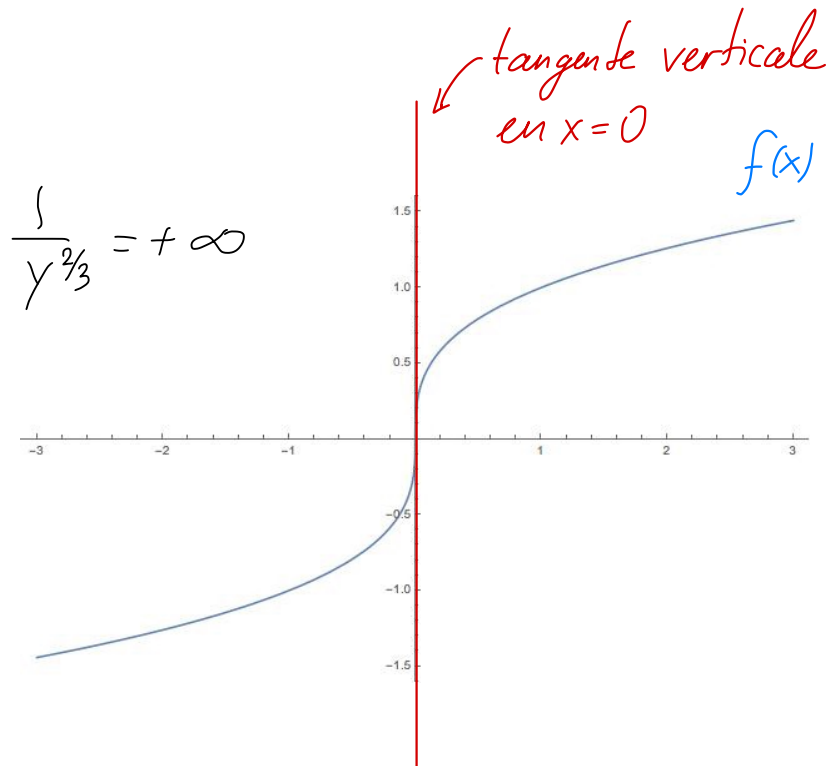
Dans ce cas le graphique de f admet une tangente verticale en x_0 .

Ex. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|x|}, & x < 0 \end{cases}$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt[3]{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^+ \\ y = -x}} \frac{-\sqrt[3]{y}}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^{\frac{1}{3}}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$



Opérations algébriques sur les dérivées. Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux fonctions dérivables en $x = x_0$

Alors: (1) $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 .

Dém: (1) *exercice* (voir [DZ])

On va démontrer $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ($g(x_0) \neq 0$) Alors (2) $\Rightarrow$ (3)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}_{\rightarrow -g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g^2(x_0)}} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(2) $(fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x)}{(x - x_0)} + \frac{f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)} \right] = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$



Ex 1. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dém: par récurrence:

Ancrage: $n=1$ $(x)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x)' = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Hérédité: Supposons que $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Considérons $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' \stackrel{(2)}{=} \underbrace{n \cdot x^{n-1}}_{\downarrow} \cdot x + x^n \cdot 1 = n \cdot x^n + x^n = (n+1)x^n$

Alors par récurrence, la proposition $(x^n)' = n x^{n-1}$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.



Ex 2. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$ par la propriété (3) on a

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x: x \in \mathcal{D}(\tan).$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

sur son domaine de définition.

Proposition Dérivée de la fonction composée des deux fonctions dérivables.

$f: E \rightarrow F$ dérivable en $x = x_0 \in E$, $g: G \rightarrow H$ dérivable en $f(x_0)$, $f(E) \subset G$

Alors $\exists (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dém:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$\nearrow g'(f(x_0))$ $\nearrow f'(x_0)$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$



$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La dérivée de $f(x) = e^x$

-176-

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x_0 + x - x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \left(\frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \right) = e^{x_0}$$

$x \rightarrow x_0 \rightarrow 1$

$$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $f: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{monotone}]{\text{continue}}]0, +\infty[$
intervalle ouvert.

$\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ surjective, injective $\Rightarrow$ bijective.

Ex 3. $f(x) = e^{2x^2 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = e^{2x^2 + \sin x} \cdot (2x^2 + \sin x)' = e^{2x^2 + \sin x} (4x + \cos x)$

Ex 4. $g(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\cos x \cdot (e^x + e^{-x}) - \sin x (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

Question 18

Soit $f(x) = \sin(e^{\sin(e^{\ln x})})$

Alors $f'(\pi)$ vaut

A. $\cos(e^{\sin 1}) \cdot \cos 1$

B. $-\cos(e^{\sin 1}) \cdot e^{\sin 1} \cdot \cos 1$

C. $e^{\sin(e^{\sin 1})} \cdot \cos(e^{\sin 1})$

D. $-\cos(e^{\sin(e^{\sin 1})}) \cdot e^{\sin 1} \cdot \cos 1$

E. $e^{\sin(e^{\sin 1})} \cdot e^{\sin 1} \cdot \cos 1$

$$f'(x) = \cos(e^{\sin(e^{\ln x})}) \cdot \overset{x=\pi}{\underbrace{e^{\sin(e^{\ln x})}}_{=1}} \cdot \cos(\overset{=1}{\underbrace{e^{\ln x}}_{=1}}) \cdot \overset{=1}{\underbrace{e^{\ln x}}_{=1}} \cdot \overset{=-1}{\underbrace{\cos x}_{=1}} \Big|_{x=\pi} = \cos(e^{\sin 1}) \cdot e^{\sin 1} \cdot \cos 1 \cdot (-1)$$