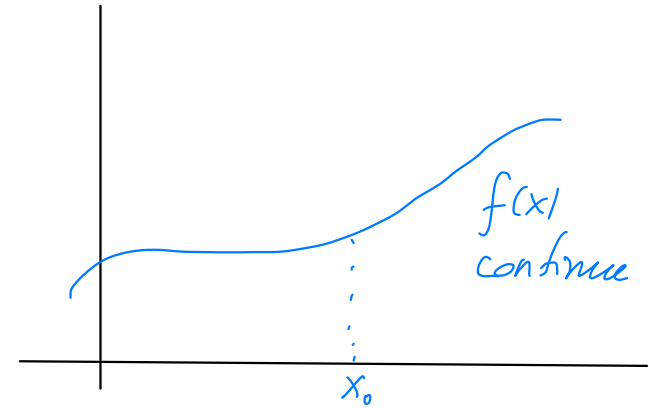


Rappel:§4.4. Fonctions continues.

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3 conditions de continuité de f en $x = x_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right.$$


Tout polynôme, toute fonction rationnelle, $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt[p]{x}$, e^x , $\ln x$, $\tan$, $\cot x$ sont continues sur leurs domaines.

Critère de Cauchy pour les fonctions continues.

$f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x = x_0$ **et en x_0** . Alors f est continue en $x = x_0$ $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \{x \in E : |x - x_0| \leq \delta\}$, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.
si et seulement si

Dém: $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} : \forall x_1, x_2 : \begin{matrix} |x_1 - x_0| \leq \delta \\ |x_2 - x_0| \leq \delta \end{matrix} \Rightarrow$ -155-

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : \left\{ x \in E : \begin{matrix} |x - x_0| \leq \delta \\ |x_0 - x_0| = 0 \leq \delta \end{matrix} \right\}$ on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Déf $f: E \rightarrow F$ est dite continue à droite (à gauche) en $x_0 \in E$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \right).$$

continue à droite continue à gauche

Remarque. f est continue en $x = x_0 \Leftrightarrow$ elle est continue à gauche et à droite en x_0

Ex. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$

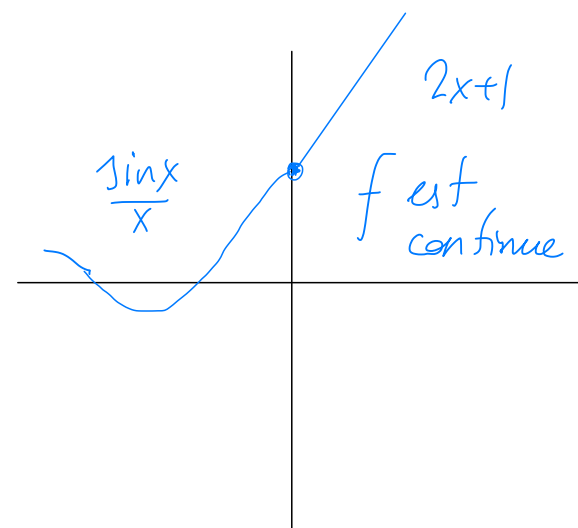
Étudier la continuité de f en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(x) \Big|_{x=0} = 2x+1 \Big|_{x=0} = 1$$

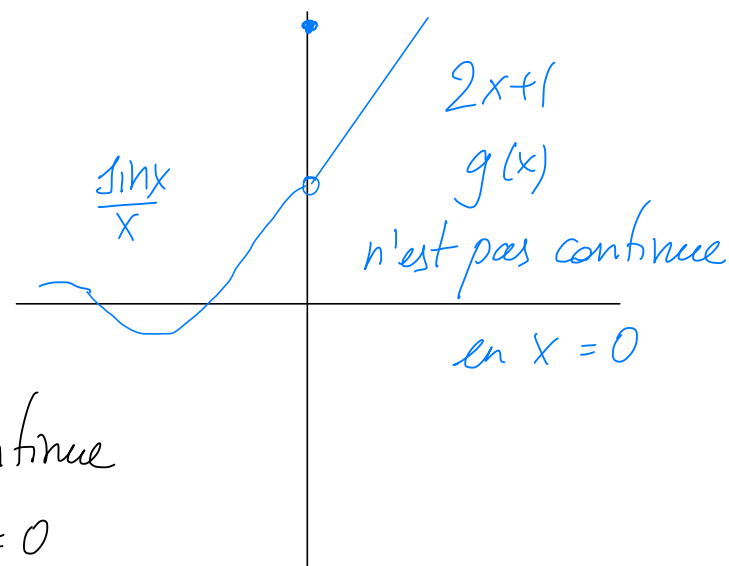


$\Rightarrow f(x)$ est continue en $x=0$.

Ex $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Mais $g(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \Rightarrow g$ n'est pas continue en $x=0$



Opérations sur les fonctions continues.

Si f et g sont continues en $x = x_0$, alors

(1) $\alpha f + \beta g$ est continue en $x = x_0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $f \cdot g$ est continue en $x = x_0$

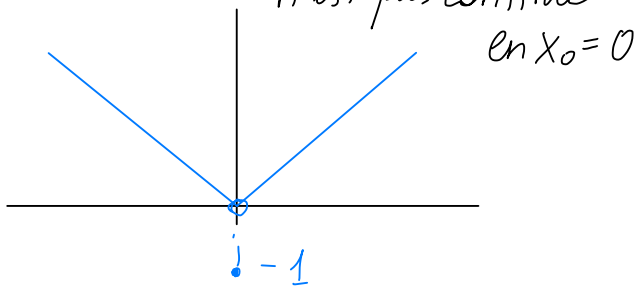
(3) $\frac{f}{g}$ est continue en $x = x_0$ si $g(x_0) \neq 0$

(4) Si $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow H$, $f(E) \subset G$, et f est continue en $x_0 \in E$ g est continue en $f(x_0) \in G$. Alors $(g \circ f)$ est continue en x_0 .

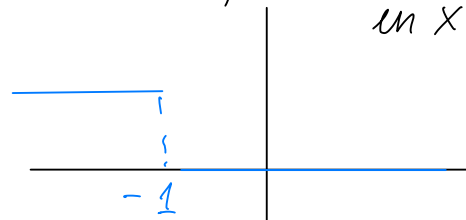
Ex. $f(x) = \frac{1 + e^{\sin(x^2+1)} + \sqrt{x^6+5}}{x^4+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque, $(g \circ f)$ est continue en $x = x_0 \not\Rightarrow$ f continue en x_0
 g continue en $f(x_0)$

Ex. $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$
 n'est pas continue en $x_0 = 0$



$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq -1 \\ 1, & x < -1 \end{cases}$
 n'est pas continue en $x = -1 = f(0)$



$g(f(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 continue sur $\mathbb{R}$

Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Déf. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction telle que $c \notin E$ (f n'est pas définie en $x=c$) et $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ existe. Alors la fonction $\hat{f}: E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c. \end{cases}$$

est appelée **le prolongement par continuité** de f au point $x=c$.
Un tel prolongement est unique et la fonction $\hat{f}$ est continue en $x=c$.

Ex 1. $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$; $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\Rightarrow$ le prolongement par continuité

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

Question 17.

Soit $f:]-3, 1[\cup]1, 5[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{(e^{x^2+2x-3} - 1)(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})}{x^2 - 2x + 1}$$

Alors f admet le prolongement par continuité en $x_0 = 1$ et

A. $\hat{f}(1) = \frac{1}{2}$

B. $\hat{f}(1) = \frac{1}{4}$

C. f n'admet pas de prolongement en $x_0 = 1$

D. $\hat{f}(1) = 2$

E. $\hat{f}(1) = 1$

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+2x-3} - 1}{x^2+2x-3} \cdot \frac{\overbrace{(x^2+2x-3)}^{=(x-1)(x+3)}}{\underbrace{(x^2-2x+1)}_{=(x-1)^2}} \cdot \frac{\overbrace{(x+3-(5-x))}^{=2x-2}}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{e^{x^2+2x-3} - 1}{x^2+2x-3}}_{x \rightarrow 1 \rightarrow 1} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}^2} \cdot \frac{2\cancel{(x-1)}}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} \xrightarrow{2+2} = 2.$$

§4.5. Fonctions continues sur un intervalle

-159-

Déf. Une fonction $f: I \rightarrow F$ où I est un intervalle ouvert non-vide est continue sur I si f est continue en tout point $x \in I$.

$f: [a, b] \rightarrow F$ est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en $x = b$ et à droite en $x = a$. ouvert

Ex. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x+3} & x \neq -\frac{3}{2} \\ 0 & , x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f$ est continue sur $] -\frac{3}{2}, \infty [$
sur $] -1, 5 [$, sur $[-5, -2]$

Théorème Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Alors f atteint son infimum et son supremum sur $[a, b]$ ($\Leftrightarrow \exists \max_{[a, b]} f(x)$ et $\exists \min_{[a, b]} f(x)$)

Etapes de démonstration: (1) Soit $m = \inf f(x)$ s'il existe, ou $m = -\infty$

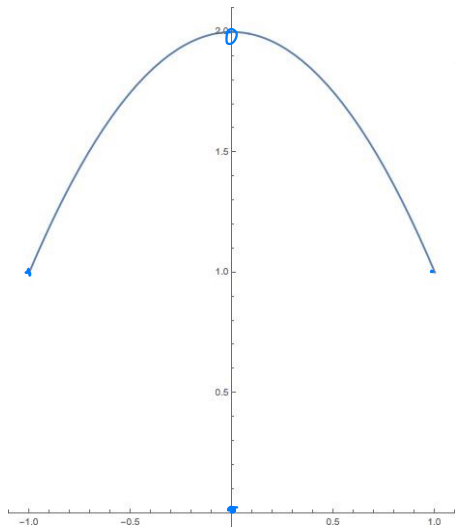
Alors $\exists (c_n) \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = m$

(2) (c_n) est bornée $\Rightarrow$ Par Bolzano-Weierstrass $\exists$ une sous-suite $(c_{n_j}) \subset (c_n)$ convergente.
 $\Rightarrow \exists c_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j} \in [a, b]$

(3) f est continue $\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f(c_{n_j}) = f(c_0)$
 $\stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = m \Rightarrow m \in \mathbb{R}$ est le minimum de $f(x)$ sur $[a, b]$. [Voir DZ §5.3.2]

Remarques

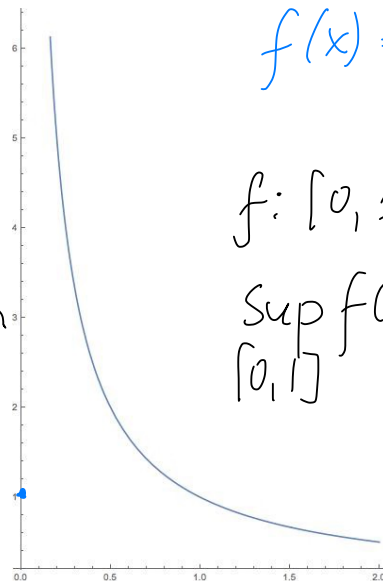
(1) Thm: Une fonction **continue** sur un intervalle fermé borné atteint son inf, son sup. -160-



$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue

$\sup_{[-1, 1]} f(x) = 2$ mais la fonction n'atteint pas son sup

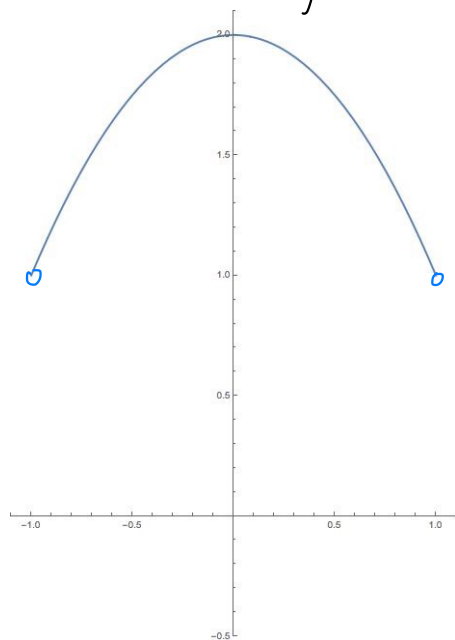


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in]0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue

$\sup_{[0, 1]} f(x)$ n'existe pas

(2) Thm: Une fonction continue sur un intervalle **fermé** borné atteint son sup et inf.

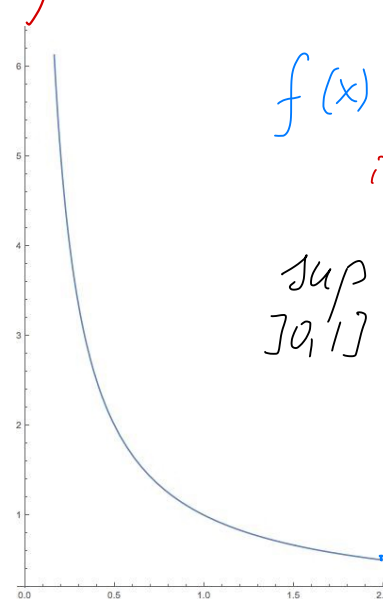


$$f(x) = 2 - x^2 :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

intervalle ouvert

$\inf_{]-1, 1[} f(x) = 1$, mais

la fonction n'atteint pas son inf



$$f(x) = \frac{1}{x} :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

intervalle semi-ouvert

$\sup_{]0, 1]} f(x)$ n'existe pas

Théorème de la valeur intermédiaire (TVI)

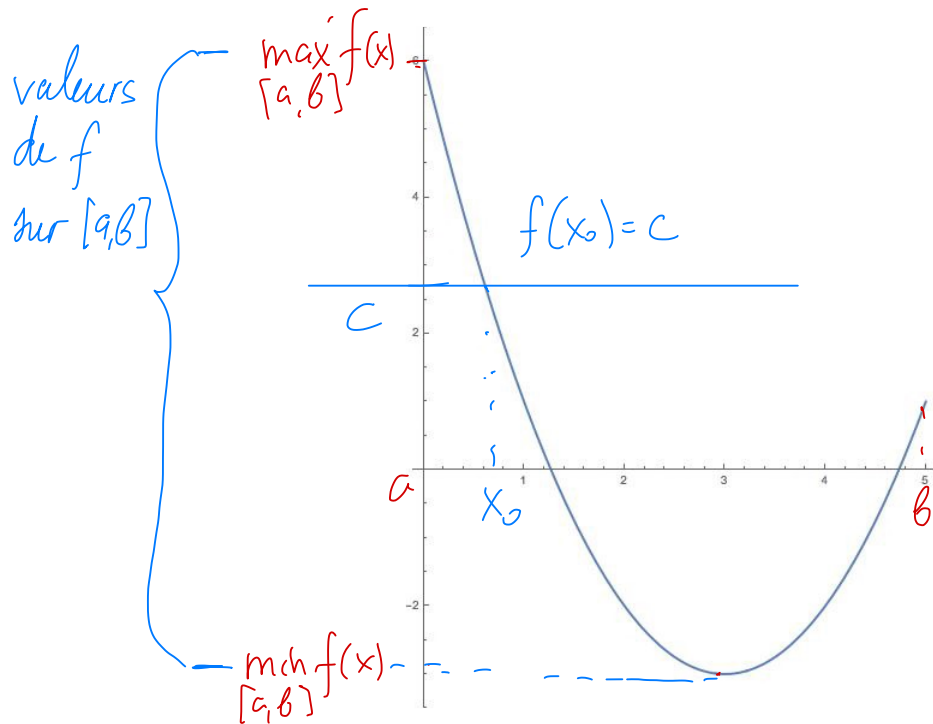
Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint son sup, son inf et toute valeur comprise entre les deux.

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right] \quad [DZ \S 5.3.22]$$

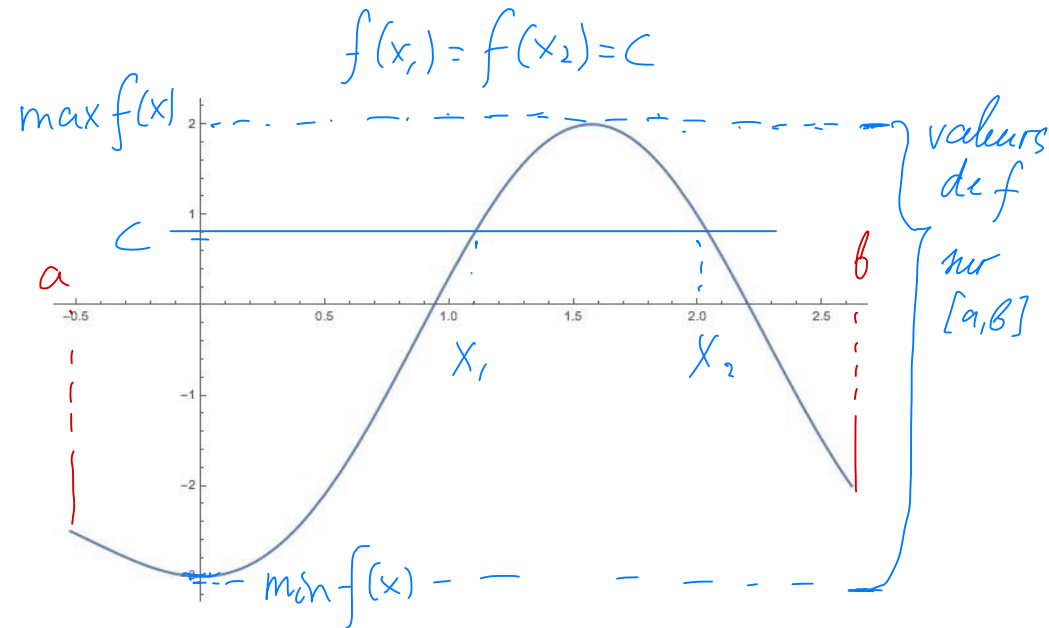
En particulier, f atteint toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

Thm: $\forall c \in \left[\min_{[a, b]} f(x), \max_{[a, b]} f(x) \right] \exists$ au moins un $x: f(x) = c$.
 $\in [a, b]$

Ex 1.



Ex 2.



-162-

Corollaire 1. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$: $f(c) = 0$.

Ex 1 Démontrer que l'équation $\sin x + \frac{1}{x-4} = 0$ possède au moins deux solutions sur $[0, \pi]$.

(1) $f(x) = \sin x + \frac{1}{x-4}$ est continue sur $[0, \pi]$, qui est fermé et borné

$\Rightarrow$ Par TVI

$$f(0) = \sin 0 + \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$f(\pi) = \sin \pi + \frac{1}{\pi-4} = \frac{1}{\pi-4} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-4} > 0$$

$> -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow \exists$ au moins un $x_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ t.g. $f(x_1) = 0$.

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(\pi) < 0 \Rightarrow \exists$ au moins un $x_2 \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ t.g. $f(x_2) = 0$
 $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow \exists$ au moins 2 solutions différentes de l'équation $\sin x + \frac{1}{x-4} = 0$
sur $[0, \pi]$

Ex2 $\cos x = \tan x$. Démontrer qu'il existe au moins une solution sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. -163-

$f(x) = \cos x - \tan x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ - fermé, borné

$$f(0) = \cos 0 - \tan 0 = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \cos 0 - \tan 0 = 1 > 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[: f(x_0) = 0.$$

On peut résoudre cette équation: $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin x \Leftrightarrow$

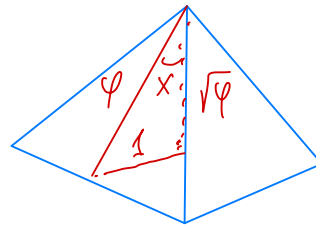
$$1 - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ puisque } |\sin x| \leq 1.$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+5}{4} = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi} \text{ ou } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ nombre d'or!}$$

$$\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1. \text{ Triangle de Kepler: } \begin{array}{c} \varphi \\ \times \\ \sqrt{\varphi} \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi}.$$

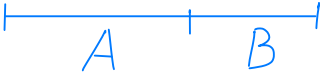
$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\varphi} \Rightarrow x \approx 38^\circ$$



Pyramide de Khéops

Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

-164-

Déf.:  $\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \varphi$ le nombre d'or

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{B}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{A}{B}} \Rightarrow \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A}{B} + 1, \frac{A}{B} > 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Proposition. Soit $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ - les nombres de Fibonacci.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$.

Dém.: Supposons que la limite existe $\Rightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$

$\downarrow$ $\quad \quad \quad \quad \quad \downarrow$
 $l \quad \quad \quad \quad \quad 1 + \frac{1}{l}$

Convergence de la suite $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$:

Exercice* (1) $f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n+1} \forall n \geq 1$ par récurrence

(2) $\frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$ par récurrence

(3) la série alternée converge par le critère de Leibnitz.

$$\Rightarrow l^2 = l + 1, l > 0 \Rightarrow l = \varphi.$$

-165-

La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$ implique, entre autres,

la propriété d'un ananas d'avoir pour le nombre de spirales
gauches et droites deux nombres de Fibonacci consécutifs.

(Plus d'information
suivant le lien
nombre-d-or
sur Moodle,
voir Phyllotaxie).



Dans ce cas #spirales rouges = 13
spirales blanches = 8