

# Test blanc le lundi 11 novembre

---

10:15 – 12:00, salle CO1  
S.v.p. attendre l'invitation pour entrer

A paraître sur Moodle, semaine 9:

Liste d'étudiant-e-s inscrit-e-s

Plan de la salle CO1

8 QCM + 5 VF 60 minutes

Sujets: cours 1-15., semaines 1-8.

Matériel: stylo à encre noire ou bleue foncée, crayon, gomme, correcteur blanc,  
(feuilles de brouillon)

Aucun document ni aucun outil électronique n'est autorisé.

Le test ne comptera pas dans la note finale.

## Rappel: Formes indéterminées

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

-143-

Ex1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = -1$$

$$\sqrt{x^2}' = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x \tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3x \cdot x \cos x}{x \sin x} = 3$

$\frac{0}{0}$

Annotations:  $\frac{\sin(3x^2)}{3x^2} \rightarrow 1$ ,  $\frac{3x \cdot x \cos x}{x \sin x} \rightarrow 1$

## Propriétés des limites infinies

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty ; \lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = \pm \infty$$

(1) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \pm \infty$

(2) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ ,  $g(x)$  est bornée au voisinage de  $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \pm \infty$

Ex:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$   $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty$

Annotations:  $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ ,  $\sin \frac{1}{x}$  bornée

(3) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \underline{l} \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ , si  $l > 0$   
 $\begin{matrix} -\infty \end{matrix}$ , si  $l < 0$

(4) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(5) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  et  $f(x) \neq 0$  au voisinage de  $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } f(x) > 0 \forall x \text{ au voisinage de } x_0 \\ -\infty, & \text{si } f(x) < 0 \text{ --} \\ \text{n'existe pas, autrement} \end{cases}$

Ex:  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$

Ex:  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$

Mais  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  n'existe pas.

(6) „Gendarmes“ Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  et  $g(x) \geq f(x) \quad \forall x$  au voisinage de  $x_0$   $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$   $g(x) \leq f(x)$   $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

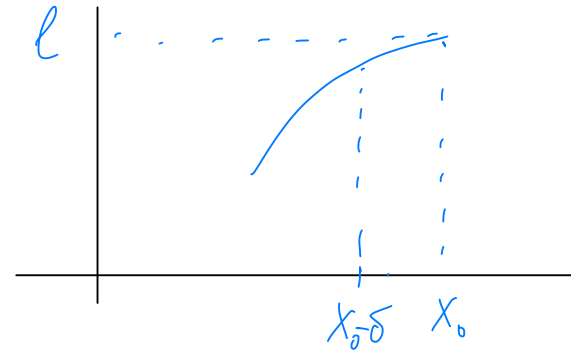
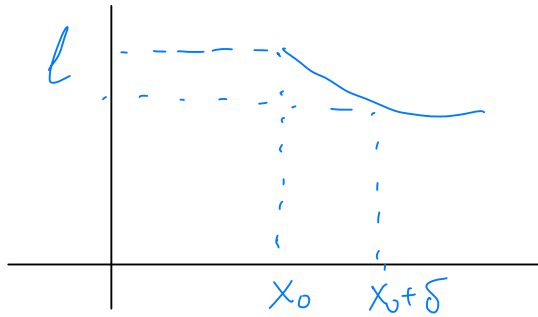
Les propriétés (1)-(6) sont toujours valables lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ .

## Limites à droite et à gauche

Déf  $f: E \rightarrow F$  est défini à droite (à gauche) de  $x_0$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $]x_0, x_0 + \alpha[ \subset E$  ( $]x_0 - \alpha, x_0[ \subset E$ ).

Déf  $f: E \rightarrow F$  définie à droite (à gauche) de  $x_0$  admet pour limite à droite (à gauche) de  $x_0$  le nombre réel  $l$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  :

$$\forall x \in E : \underset{\text{à droite}}{0 < x - x_0 \leq \delta} \text{ (} \underset{\text{à gauche}}{0 < x_0 - x \leq \delta} \text{)} \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$



Notation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

à droite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

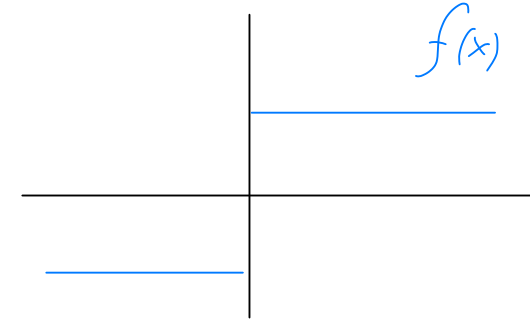
à gauche.

Remarque.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$

Ex.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

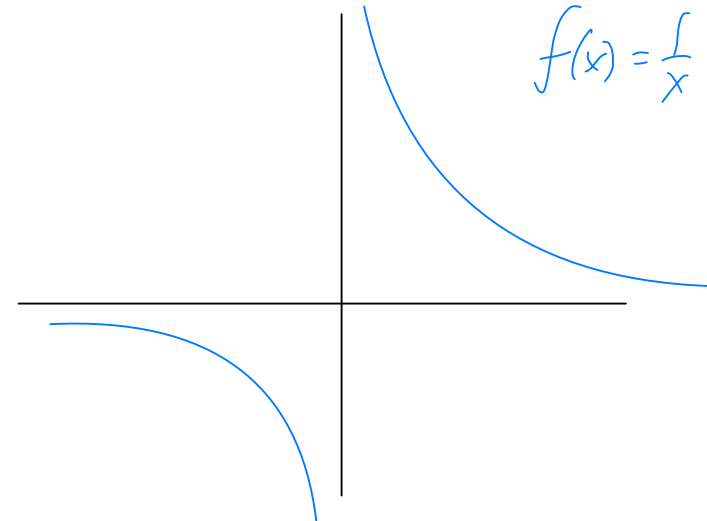
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  n'existe pas



Remarque. On peut aussi définir les limites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$

Ex. :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



### §4.3. Fonction exponentielle et logarithmique

-147-

Déf.  $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  (Rappel:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  converge absolument  $\forall x \in \mathbb{R}$  par le critère de d'Alembert:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ )

Convention:  $0^0 = 1, 0! = 1$   $\left( \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \Big|_{x=0} = 0^0 = 1$  ;  $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! 0!} = 1 \Rightarrow 0! = 1$

Proposition. (1)  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(2)  $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3)  $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$E_x: m=3$

$$\sum_{k+p=3} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^p}{p!} = \left( \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right)$$

Idee: (1)  $e^x \cdot e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k+p=m} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^p}{p!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{k! (m-k)!} x^k y^{m-k} \right)$   
 $(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots)$   $(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} x^k y^{m-k}}_{(x+y)^m \text{ Binôme de Newton}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m \stackrel{(\text{def})}{=} e^{x+y}$$

$$(2) e^x e^{-x} \stackrel{(1)}{=} e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad -148-$$

$$(3) e^x > 0: e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

## Propriétés de la fonction $f(x) = e^x$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \underset{x > 0}{\geq} \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y = -x} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$(3) e^x \uparrow \text{strictement } \forall x \in \mathbb{R}: \text{ Soit } x > y \Rightarrow e^{x-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!} \underset{x-y > 0}{>} 1 + \underbrace{(x-y)}_{>0} > 1$$

$$\Rightarrow e^x = e^y \cdot \underbrace{e^{x-y}}_{> 1 \text{ si } x > y} > e^y \quad \forall x > y$$

$\Rightarrow e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est strictement croissante  $\Rightarrow$  injective ( $x > y \Rightarrow e^x > e^y$ )  
surjective (à voir plus tard)  $\Rightarrow$  bijective

Proposition.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{red arrow } k=0 \Rightarrow \frac{x^0}{0!} = 1$$

Dém:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 \right| = \\ &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} = |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} < |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| \cdot e^{|x|} \end{aligned}$$

$k! > (k-2)!$        $n = k-2$        $e^{|x|}$

$$|x| \cdot e^{|x|} < |x| \cdot e \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| e \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes on obtient la limite}$$

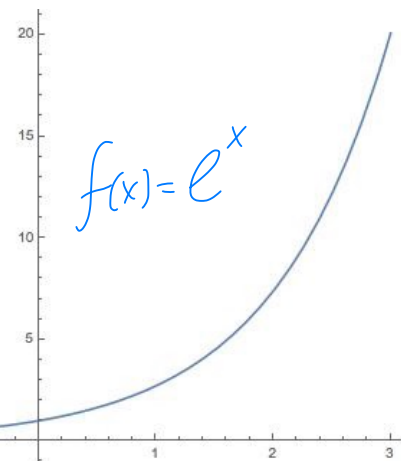
$x \rightarrow 0 \Rightarrow |x| < 1$        $\downarrow$        $\downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$$

$t(x) \neq 0$  au voisinage de  $x = a$





On a:  $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  bijective  $\Rightarrow$  on peut définir la fonction réciproque

Fonction logarithmique. (Logarithme naturel = logarithme népérien; John Napier)

$e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  bijective  $\exists \ln x: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$e^x = y \iff x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Propriétés. (1)  $e^{\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (fonctions réciproques)

$$(2) \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$(3) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$(4) \ln(x^r) = r \ln x \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \text{ en fait } r \in \mathbb{R}$$

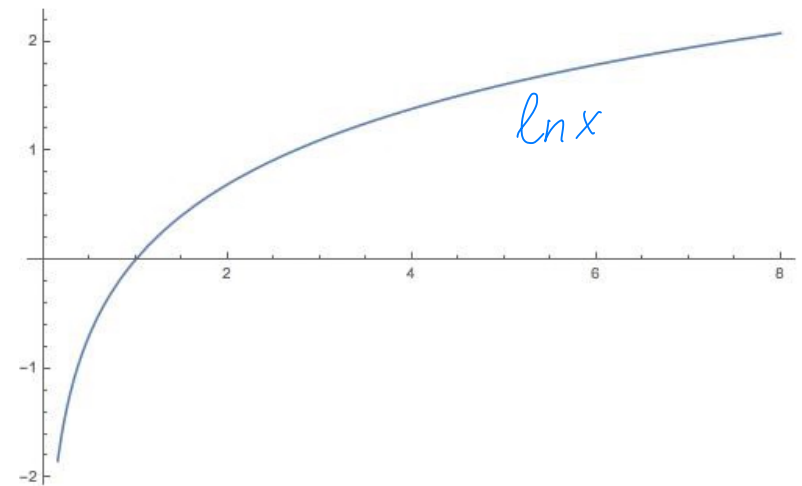
$$(5) \ln(1) = 0, \ln(e) = 1 \quad e^0 = 1, e' = e$$

Dém. (2):  $e^{(\ln x + \ln y)} = \underbrace{e^{\ln x}}_x \cdot \underbrace{e^{\ln y}}_y \stackrel{(\text{dét})}{=} x \cdot y =$

$$\stackrel{\text{dét}}{=} e^{\ln(x \cdot y)} \Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

puisque  $e^x$  est bijective.

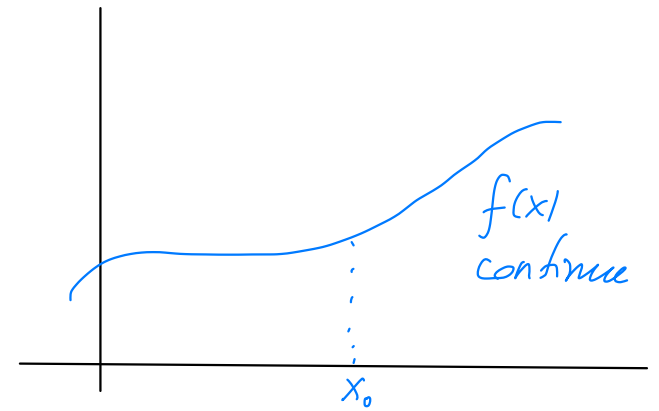
$$(3)-(5) \quad [DZ \text{ \S 7.2}]$$



## §4.4. Fonctions continues.

Déf Une fonction  $f: E \rightarrow F$  est continue en un point  $x_0 \in E$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

3 conditions de continuité de  $f$  en  $x = x_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \text{ existe} \\ (2) f(x_0) \text{ existe} \\ (3) \text{l'une est égale à l'autre.} \end{array} \right.$$


- Ex.
- (1)  $f(x) = x^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  :  $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p \quad \forall a \in \mathbb{R}$
  - (2) Tout polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$  (opérations algébriques).
  - (3) Toute fonction rationnelle sur son domaine
  - (4)  $f(x) = \sqrt[p]{x}$  est continue sur son domaine  $\forall p \in \mathbb{N}$  ( $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{a}$ ,  $a > 0$ )
  - (5)  $f(x) = \sin x$  et  $g(x) = \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  et  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  sont continues sur leurs domaines de définition

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \lim_{x \rightarrow a} \sin(a + (x-a)) = \lim_{x \rightarrow a} (\underbrace{\sin a}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\cos(x-a)}_{x \rightarrow a} + \underbrace{\cos a}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin(x-a)}_{\rightarrow 0}) = \sin a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(1)  $e^x$  est continue  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (e^x - e^{x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} (e^{x-x_0} - 1) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{e^{x_0}}_{e^{x_0}} \underbrace{\frac{e^{x-x_0} - 1}{x-x_0}}_{1} \underbrace{(x-x_0)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0} \Rightarrow$  la fonction exponentielle est continue  $\forall x \in \mathbb{R}$

(2)  $e^x \uparrow \Rightarrow \ln x \uparrow$ ;  $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$ ; on peut montrer que si  $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est continue,  $\ln x$  est continue aussi.  
 $\ln w < \ln t \Leftrightarrow w < t$

(3)  $\ln x$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , en particulier  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 = \ln 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x = \ln y \\ y = e^x}} \frac{e^{\ln y} - 1}{\ln y} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\ln y} = 1 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1$$

Soit  $y = 1+z \Rightarrow y \rightarrow 1 \Rightarrow z \rightarrow 0$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$$

(4)  $\frac{\ln(1+z)}{z} = \ln((1+z)^{\frac{1}{z}}) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$ ;  $e^x$  est continue  $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} e^{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = e^1$   
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} e^{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e \quad \text{generalisation de } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

Finalement on a des limites remarquables:

-153-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+t(x))}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (1+t(x))^{\frac{1}{t(x)}} = e \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$$

$t(x) \neq 0$  au voisinage de  $x=a$

### Question 15.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ e^{-1 - \frac{x}{2}} e^x \left( e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) e^x \right]$$

A vaut  $\infty$

B. vaut  $-\infty$

C. vaut 0

**D.** vaut 1

E vaut e

F. n'existe pas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-1 - \frac{x}{2}} e^x \left( e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \cdot \left( e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \right) e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e} (1 + e^{-x}) e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{e^x} \right) e^x =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left( 1 + t(x) \right)}_{\substack{t(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty}}^{\frac{1}{t(x)}} = \frac{1}{e} \cdot e = 1$$

$t(x) \rightarrow 0$   
 $x \rightarrow \infty$   $\rightarrow e$