

Test blanc le lundi 11 novembre

Mardi 17h

Inscription: lien sur Moodle, aussi sur Ed : s'inscrire avant 17:00 le 5/11.
s'inscrire une fois avec votre numéro Sciper.

Test blanc: 10:15 le lundi prochain

La liste des étudiants et plan de la salle à paraître sur Moodle.

8 QCM + 5 V.F. 60 minutes (~ 10:20 - 11:20)

Sujets: cours 1-15., semaines 1-8.

Matériel: stylo à encre noire ou bleue foncée, crayon, gomme, correcteur blanc,
(feuilles de brouillon)

Aucun document ni aucun outil électronique n'est autorisé.

Le test ne comptera pas dans la note finale.

Rappel: Théorème des 2 gendarmes.

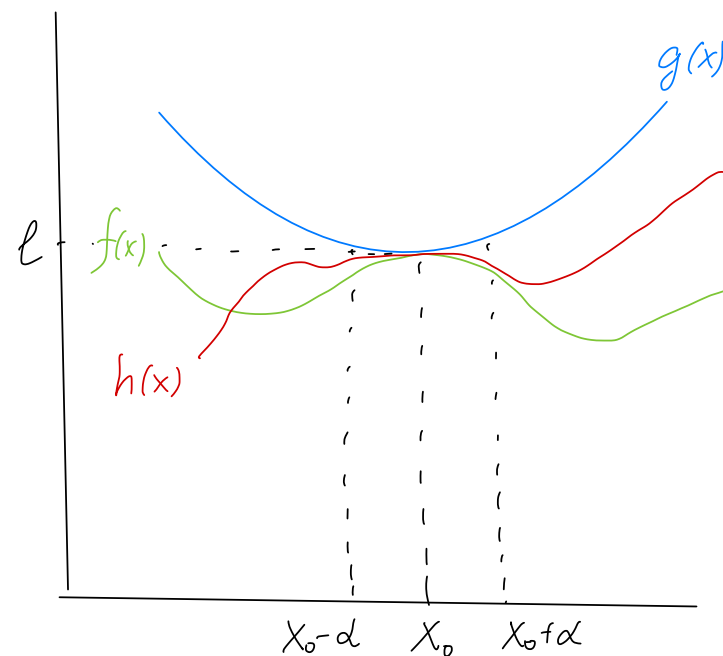
Soient $f, g, h : E \rightarrow F$ trois fonctions telles que

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

$$(2) \exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}, \text{ on a}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$



Exemple important: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{pour } x \text{ proche à } 0, x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$$

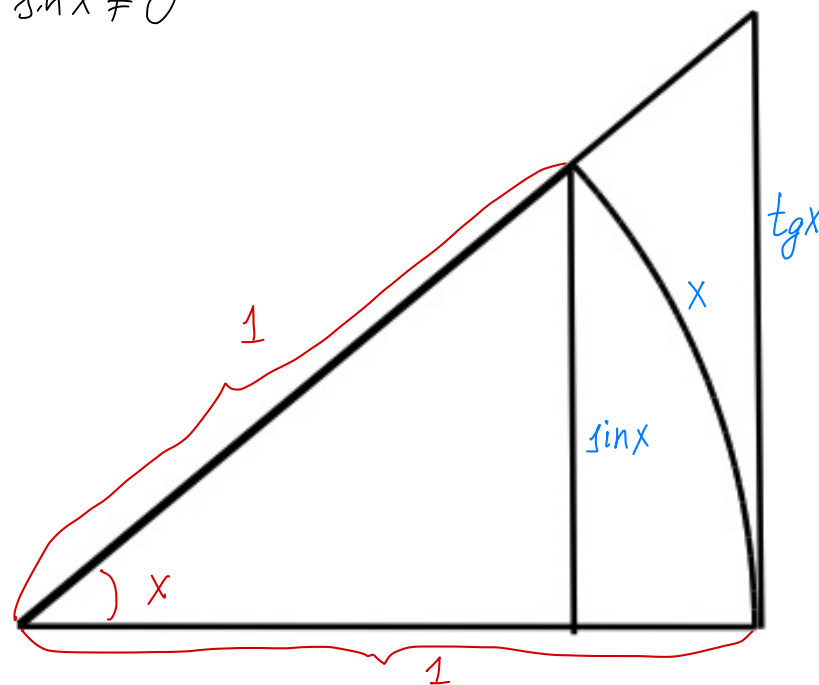
$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad x \text{ proche à } 0.$$

$x \rightarrow 0 \rightarrow ?$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$$

$$|1 - \cos x| = 2 \left| \sin^2 \frac{x}{2} \right| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$$



$$0 \leq |1 - \cos x| \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow 0 & \downarrow & \\ 0 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\begin{array}{ccc} x \rightarrow 0 & \downarrow & \\ 1 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Théorème Limite de la composée des 2 fonctions.

Soit $f: E \rightarrow F$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$; $g: G \rightarrow H$, $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$

Supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0 : 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$.

Dém: $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |y - y_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |g(y) - l| \leq \varepsilon$

Aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \text{pour } \delta_1 > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \delta_1$

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$g(y) = \frac{\sin y}{y} \rightarrow 1 \quad y \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

n'existe pas!

la fonction n'est pas définie

au voisinage de 0.

$$\text{Soit } \delta = \min(\delta_2, \alpha) \Rightarrow \forall x \in E: 0 < |x - x_0| < \delta \begin{cases} \xRightarrow{\delta_2} |f(x) - y_0| \leq \delta_1 \\ \xRightarrow{\alpha} 0 < |f(x) - y_0| \end{cases} \Rightarrow 0 < |f(x) - y_0| \leq \delta_1$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell \quad \square$$

Ce théorème nous permet de changer des variables dans les limites.

Ex 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - 2\sin^2(2x) - \cancel{1} + 2\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin^2 x - \sin^2(2x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}_{\downarrow 1^2} - \underbrace{\left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2}_{\downarrow 1^2} \cdot 4 \right) = 2(1 - 4) = -6.$$

$$g(y) = \frac{\sin y}{y} ; f(x) = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$$

Ex 2.

-135-

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 1}{x-1-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{(-1)}{\cancel{2-x}}}{\underset{\downarrow 2}{\cancel{x-2}}} \frac{\overset{\rightarrow 1}{\sqrt{x-1} + 1}}{\underset{\downarrow 2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}}} = -\frac{1}{2}$$

Remarque. Par le Thm, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(t(x))}{t(x)} = 1$ si $\lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$ et $\exists$ un voisinage de $x=a$ t.q. $t(x) \neq 0$.

Ex 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2} \cdot \frac{1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

$\downarrow 1$ $\rightarrow 4$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$y = \sqrt{x+1}-2$$

$x \rightarrow 3$

Ex 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Il suffit de trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

$$\text{Soit } a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 0$$

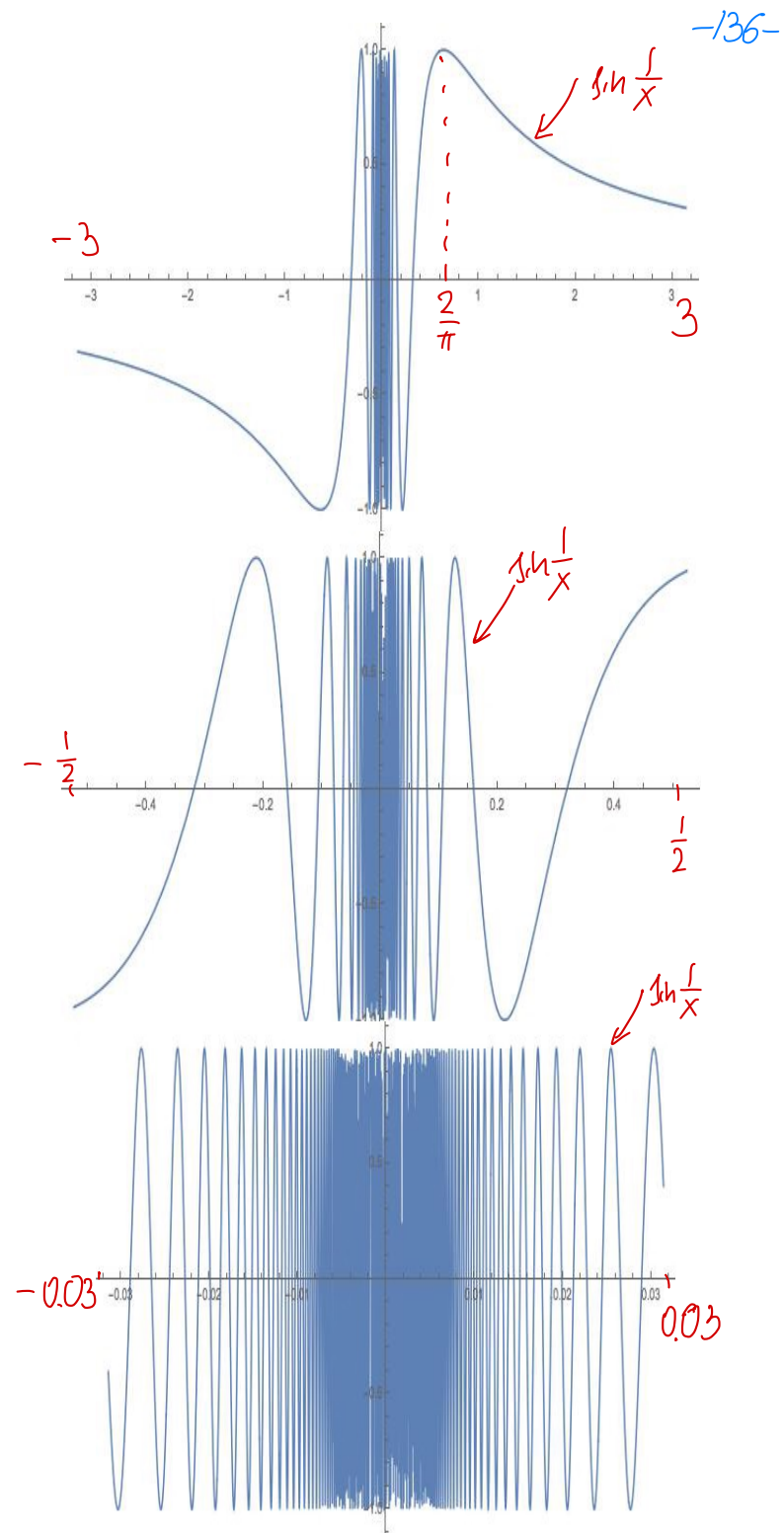
$$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

$$\text{Soit } b_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0$$

$\Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.



Ex 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

On a : $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \in D(f)$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

multiplier par $|x| > 0$ si $x \neq 0$

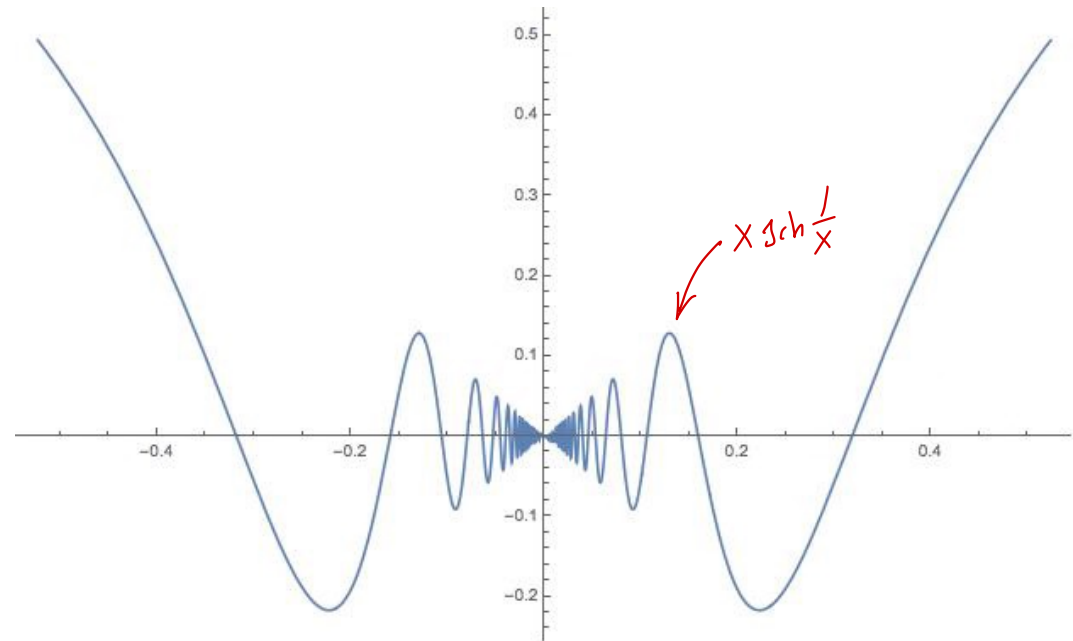
$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$\downarrow$
0

$\downarrow x \rightarrow 0$
0

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$



Limites lorsque x tend vers $\pm \infty$

Déf $f: E \rightarrow F$ est définie au voisinage de $+\infty$ ($-\infty$) si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$:

$$] \alpha, +\infty[\subset E \quad (\text{resp. }]-\infty, \alpha[\subset E).$$

Déf $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $+\infty$ ($-\infty$) admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers $+\infty$ ($-\infty$) si $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R}$:

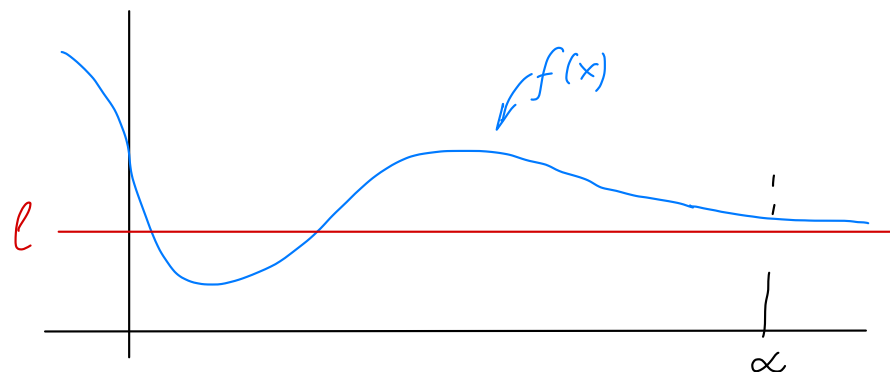
$$\forall x \in E : x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{resp. } \forall x \in E : x \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$



Dans ce cas on dit que la fonction f admet une asymptote horizontale $y = l$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R} : \forall x \geq \alpha \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \text{ On pose } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \text{Si } x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{par la déf } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

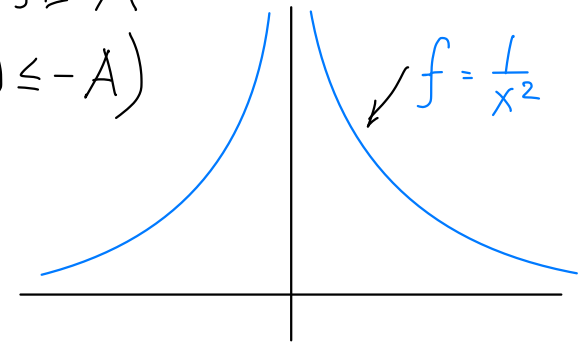
Limites infinies.

Déf $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ ($-\infty$) lorsque $x \rightarrow x_0$ si $\forall A > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$ ($f(x) \leq -A$)

Notation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



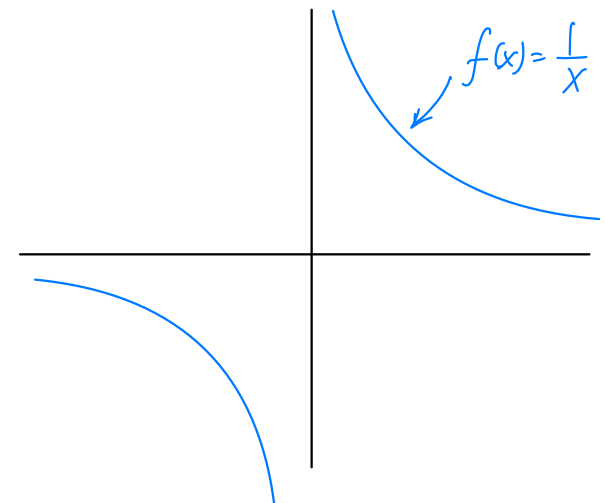
Ex $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ Dém: Soit $A > 0$. Il faut trouver $\delta > 0 : 0 < |x - 0| \leq \delta \Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2} \geq A \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} \geq \sqrt{A} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow \text{on pose } \delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Si $|x| \leq \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq A \Rightarrow$ par la déf $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. Dans tout voisinage de 0 il existent x_1, x_2 tels que $x_1 < 0 < x_2$

et $\frac{1}{x_1} < -M, \frac{1}{x_2} > M$ pour M choisi



Déf. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ $(-\infty)$ tend vers $\pm\infty$

lorsque $x \rightarrow +\infty$ $(x \rightarrow -\infty)$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$(f(x) \leq -A)$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$(f(x) \leq -A)$$

Notations:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = \infty$.

On a défini 4 types de limites:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Tous les résultats obtenus pour $\lim_{x \rightarrow x_0}$ restent valables pour $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ [DZ, § 5.2.18]

Formes indéterminées.

$\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; $\underbrace{0^0, 1^\infty, \infty^0}_{\text{plus tard}}$ -141-

Ex. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$ $\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\substack{||x||, x \rightarrow \infty \Rightarrow |x|=x \\ x>0}} \sqrt{1+\frac{2}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{>0}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) \quad \infty - \infty$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\substack{||x||=-x \\ x \rightarrow -\infty}} \sqrt{1+\frac{2}{x}} - x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\cancel{x}}{(-\cancel{x})(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = -1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{<0}$

Exercice: calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x)$ par le changement de variable $y = -x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\sqrt{y^2-2y} - y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2-2y-y^2}{\sqrt{y^2-2y}+y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2y}{\sqrt{y^2-2y}+y} = -1$$

$y \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt{y^2} = y$

Lx

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + x^2 - 2x}{(x-1)^2} \frac{0}{0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right) + y^2 - 1}{y^2}$$

$$y = x - 1 \quad x \rightarrow 1 \\ x = y + 1 \quad \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x^2 - 2x = (y+1)^2 - 2(y+1) = y^2 + 2y + 1 - 2y - 2 = y^2 - 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}_{=1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + y^2 - 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right) + y^2 - \cancel{1}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y^2} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(1 - 2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{\frac{\pi}{4}y} \right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} \right)^2}_{=1} \right) = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

Question 14.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1 - \sin(\cos(\frac{\pi}{2} - x))}{\sin(\sin(2x))} =$$

A. vaut 0

B. vaut $-\frac{1}{2}$

C. vaut -1

D. vaut $\frac{1}{2}$

E. vaut $-\frac{3}{2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - 2\sin^2 x - \cancel{1} - \sin(\overset{\leq 0}{\cos \frac{\pi}{2}} \cos x + \overset{\leq 1}{\sin \frac{\pi}{2}} \sin x)}{\sin(\sin(2x))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x - \sin(\sin x)}{\sin(\sin 2x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{-2\cancel{\sin^2} x}{2\cancel{\sin} x \cos x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2x)}{\sin(\sin(2x))}}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sin} x}{2\cancel{\sin} x \cos x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2x)}{\sin(\sin(2x))}}_{\rightarrow 1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}.$$