

Limite d'une fonction

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$ est **définie au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset E$

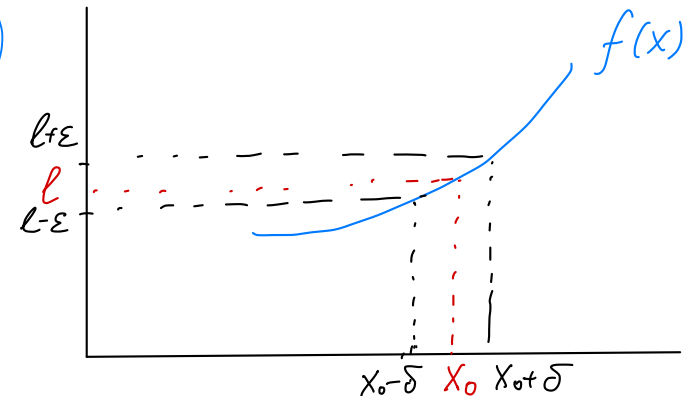
Remarque f n'est pas forcément définie en x_0 .

Ex. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$, mais pas en $x_0 = 0$

Déf. Une fonction $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de x_0 **admet pour limite** le nombre réel l lorsque x tend vers x_0 si pour tout $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que pour tout $x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \delta$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x δ -proche de x_0 (sauf peut-être $x = x_0$) on a $f(x)$ ε -proche de l .



Ex. $f(x) = 3x - 1$ $x_0 = 1$ On va démontrer que $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que si $0 < |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \varepsilon$

$$|f(x) - 2| = |3x - 1 - 2| = |3x - 3| = 3|x - 1| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{Si } \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

on peut contrôler avec δ ← on veut

$$\forall x : |x - 1| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{3} \text{ on a : } |3x - 3| = |f(x) - 2| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tel que $\forall x : |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \varepsilon$.

Alors par la déf de la limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Ex. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ $\forall x_0 > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$: $0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| ; \text{ puisque } \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| \leq \varepsilon$$

on veut ←

$$\text{Si on pose } \delta = \varepsilon \sqrt{x_0} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{\varepsilon \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon$$

$|x - x_0| \leq \delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$

$$\text{Si } |x - x_0| \leq \delta = \varepsilon \sqrt{x_0} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Proposition Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Soit $f: E \rightarrow F$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ $\iff$ Pour toute suite $(a_n) \subset \{x \in E, x \neq x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

P Q

Dém: $P \Rightarrow Q$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Soit $(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$, $a_n \in E \setminus \{x_0\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - x_0| \leq \delta$ le même δ

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(a_n) - l| \leq \varepsilon \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

$Q \Rightarrow P$ par contraposée. $\neg P \Rightarrow \neg Q$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x : 0 < |x - x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon$. (négation de P).

(On va construire une suite $(a_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l$ (négation de Q)

$\rightarrow \exists \varepsilon > 0$ fixé Soit $\delta = 1 \Rightarrow \exists a_1 \in E : 0 < |a_1 - x_0| \leq 1 \text{ et } |f(a_1) - l| > \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists a_2 \in E : 0 < |a_2 - x_0| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |f(a_2) - l| > \varepsilon$

$\vdots$

$\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \exists a_n \in E : 0 < |a_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ et } |f(a_n) - l| > \varepsilon$

$\Rightarrow$ la suite $(a_n) : 0 < |a_n - x_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

mais $|f(a_n) - l| > \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l \Rightarrow \neg Q$



Remarque. Il est important d'avoir la propriété Q pour toute suite convergente vers x_0

Ex. $f(x) = \begin{cases} 1 & , x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ n'existe pas, mais } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Corollaire. Soit $f: E \rightarrow F$ définie au voisinage de x_0 .

Supposons que pour toute suite $(a_n) \in E \setminus \{x_0\}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, la suite $(f(a_n))$ converge. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

Idée: Deux suites (a_n) et $(b_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, et $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$
Supposons.

Soit $\begin{cases} c_{2n} = a_{2n} \\ c_{2n+1} = b_{2n+1} \end{cases} \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{2n}) = l_1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{2n+1}) = l_2$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n)$ n'existe pas $\Rightarrow$ contradiction

$\Rightarrow$ Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ $\xRightarrow[\text{par les suites}]{\text{caractérisation}}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe $\square$

Ex. $f(x) = x^p, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

Soit $(x_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow x_0$ une suite arbitraire convergente vers x_0 , $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Soit $a_n = x_n - x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + a_n)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0^p + \binom{p}{1} x_0^{p-1} a_n + \binom{p}{2} x_0^{p-2} a_n^2 + \dots + \binom{p}{p} a_n^p \right) = x_0^p$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \rightarrow 0}}$

$\Rightarrow$ par la caractérisation

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p$$

Proposition. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$, alors $l_1 = l_2$
(unicité de la limite)

Dém: pour les suites (a_n) convergentes vers x_0 , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l_1$,
et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l_2 \Rightarrow$ par l'unicité de la limite d'une suite
on a $l_1 = l_2$

Proposition Critère de Cauchy pour les fonctions

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in \{x \in E: 0 < |x - x_0| \leq \delta\} \text{ on a } |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

Voir DZ § 5.28.

$\Rightarrow$ directe Δ

$\Leftarrow$ caractérisation à partir des suites

Proposition Opérations algébriques sur les limites

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$.

Alors: (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 .

Dém: par la caractérisation à partir des suites.

-128-

$\Rightarrow$ Pour tout polynôme et toute fonction rationnelle, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf les zéros du dénominateur de $f(x)$.

(Puisque on a démontré $\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R};$
opérations algébriques $\Rightarrow$ on obtient les limites des fonctions rationnelles.)

Ex. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 - 6x + 1} = \frac{2}{-2} = -1.$

Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions.

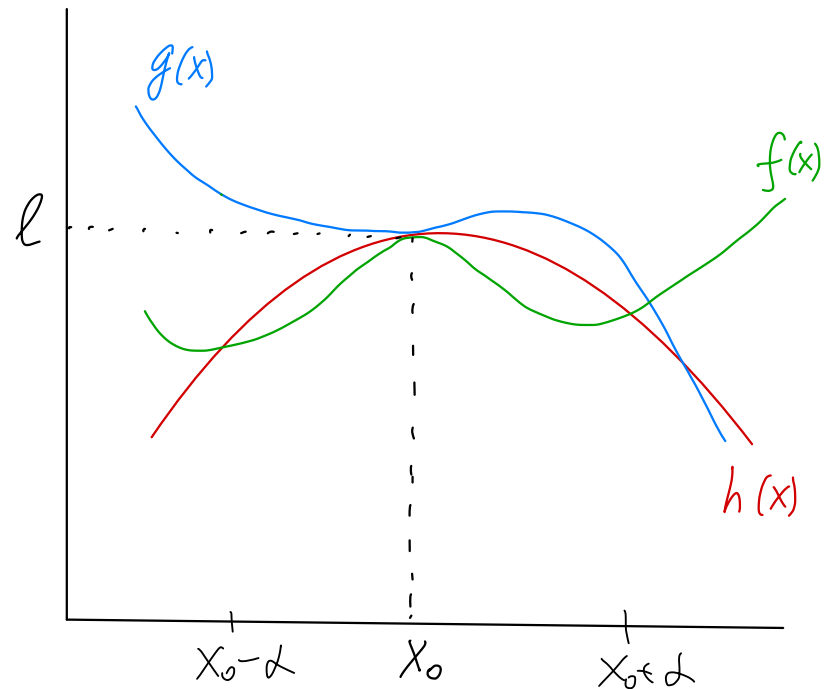
Soient $f, g, h: E \rightarrow F$ tels que

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

(2) $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$

on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow$ Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$



Dém: Soit $(a_n) \in \{x \in E \setminus \{x_0\}\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \Rightarrow |a_n - x_0| \leq \alpha$ ← le même α que dans les conditions

$$f(a_n) \leq h(a_n) \leq g(a_n) \quad \forall n \geq m$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ on a par la caractérisation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \ell.$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes pour les suites

$$\begin{array}{ccccc} f(a_n) & \leq & h(a_n) & \leq & g(a_n) & \Rightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = \ell \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ell & & \ell & & \ell & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Par la caractérisation à partir des suite $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$



Ex. 1 Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+g(x)} = 1$.

Astuce:

$$\text{Si } t \geq -1 \Rightarrow 1 - |t| \leq \sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{1}{2}t$$

$$(1) \sqrt{1+t} \leq \sqrt{1+t+\frac{t^2}{4}} \leq \sqrt{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2} = \left|1+\frac{t}{2}\right|$$

$$(2) t \geq 0 \Rightarrow 1 - |t| = 1 - t \leq 1 \leq \sqrt{1+t}$$

$$\begin{aligned} -1 < t < 0 \Rightarrow 1 - |t| = 1 + t \leq \sqrt{1+t} &\Leftrightarrow \cancel{1+t} + t + t^2 \leq \cancel{1+t} \Leftrightarrow \underbrace{t}_{<0} \underbrace{(1+t)}_{\geq 0} \leq 0 \\ \Rightarrow 1 - |t| \leq \sqrt{1+t} \quad \forall t: t \geq -1. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \text{ si } |x| < \delta \Rightarrow |g(x)| \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq -1$.

$$\Rightarrow \begin{array}{c} 1 - |g(x)| \leq \sqrt{1+g(x)} \leq 1 + \frac{1}{2}g(x) \\ \downarrow x \rightarrow 0 \qquad \qquad \downarrow x \rightarrow 0 \\ 1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+g(x)} = 1$$

Ex 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

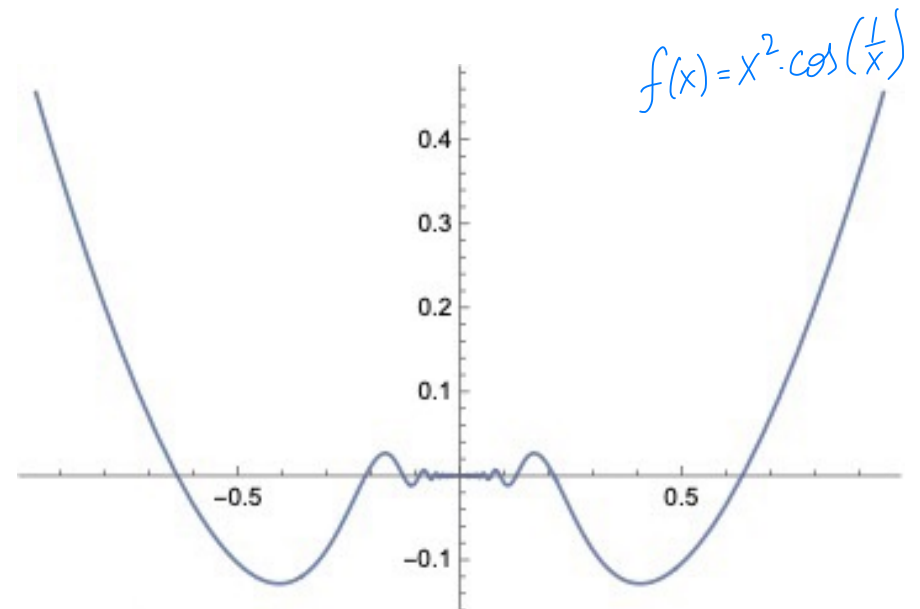
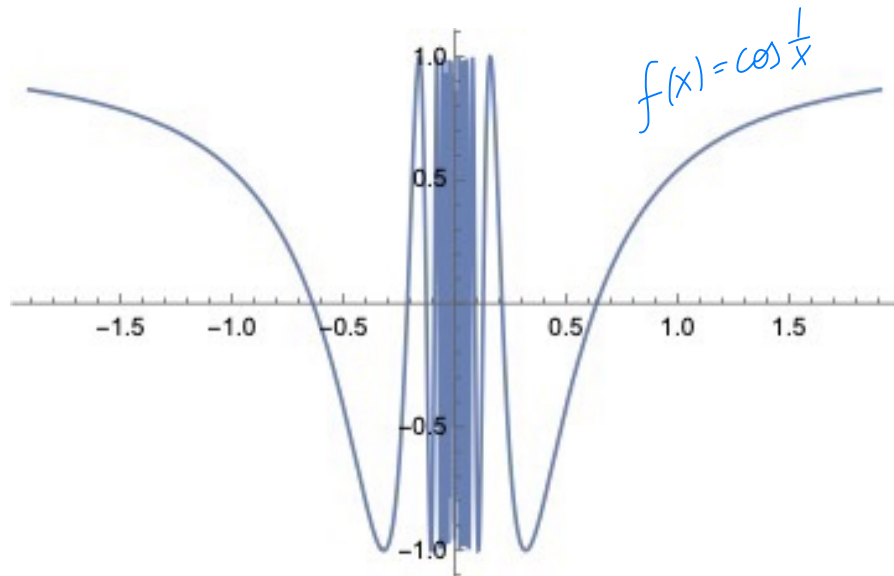
$f(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas définie en $x=0$,
mais elle est définie au voisinage de $x=0$. -13/-

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \cdot x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$\downarrow x \rightarrow 0$ $\downarrow x \rightarrow 0$
 0 0

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$



Question 13

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{1 + \sin(\frac{1}{x})} + 3}{\sqrt{1 - \cos^2(\frac{1}{x})} + 2x^2}$

A. vaut $\frac{3}{2}$

B. vaut 3

C. vaut $\frac{1}{2}$

D. vaut $\frac{4}{3}$

E. n'existe pas

$$0 \leq \sqrt{1 + \sin(\frac{1}{x})} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 \leq x^2 \sqrt{1 + \sin(\frac{1}{x})} \leq x^2 \sqrt{2} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow_{x \rightarrow 0} \\ 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 \sqrt{1 + \sin(\frac{1}{x})} + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3$$

$$0 \leq \sqrt{1 - \cos^2(\frac{1}{x})} \leq 1, \quad 2x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$\sqrt{1 - \cos^2(\frac{1}{x})} + 2x^2$ peut être arbitrairement petit!

$$\begin{aligned} \text{Soit } x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) &= \frac{(\frac{1}{\pi n})^2 \sqrt{1 + \sin(\pi n)} + 3}{\sqrt{1 - \cos^2(\pi n)} + 2 \frac{1}{(\pi n)^2}} = \\ &= \frac{(\frac{1}{\pi n})^2 + 3}{\frac{2}{(\pi n)^2}} = \frac{1 + 3(\pi n)^2}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Par la caractérisation à partir des suites, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.