

Chapitre 4. Fonctions réelles.

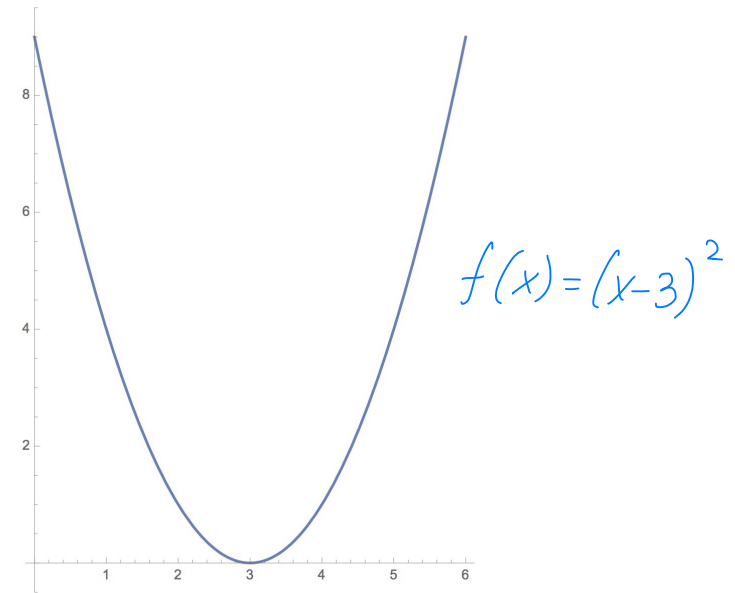
§4.1. Définitions et propriétés de base.

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$, où $E, F \subset \mathbb{R}$ est une application qui donne pour tout élément $x \in D(f) = E$ **un** élément $y = f(x) \in F$

$D(f)$ - domaine de définition ($= E$)

$f(D)$ - ensemble image $\subset F$ l'ensemble d'arrivée

Notation $x \rightarrow f(x)$



Déf Le **graphique** de $f: E \rightarrow F$ est l'ensemble des points sur le plan $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x, f(x))$

Remarque Si la fonction est donnée par une formule, alors $D(f)$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ est bien définie

Propriétés de base.

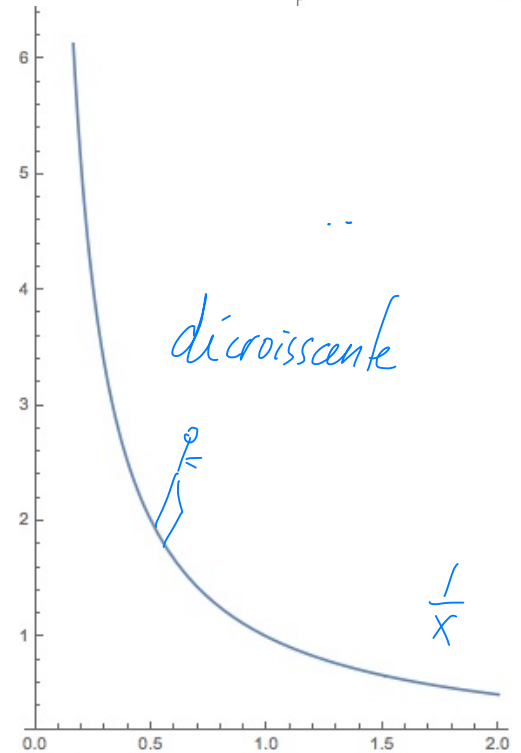
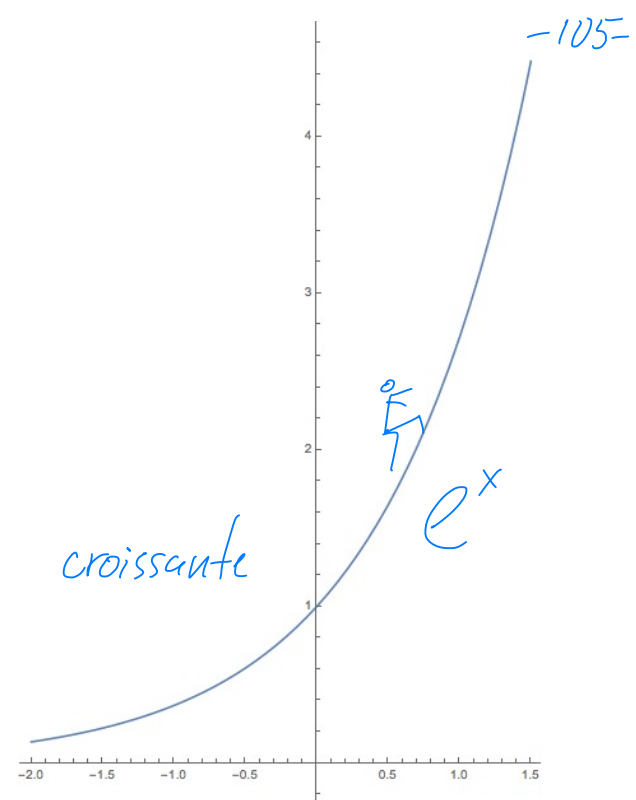
- (1) f est (strictement) croissante sur $D(f)$ si
 $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 $f(x_1) < f(x_2)$

Notation f croissante: $f(x) \uparrow$

- (2) f est (strictement) décroissante sur $D(f)$ si
 $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 $f(x_1) > f(x_2)$

Notation f décroissante: $f(x) \downarrow$

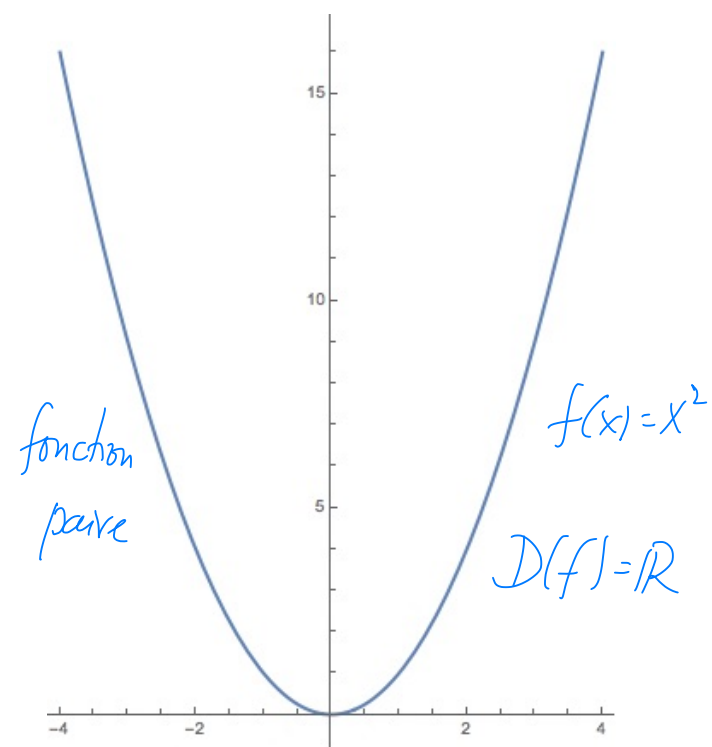
- (3) Si f est (strictement) croissante sur $D(f)$ ou
(strictement) décroissante sur $D(f)$, alors elle est
(strictement) monotone sur $D(f)$



(4) f est paire si

$D(f)$ est symétrique : $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$

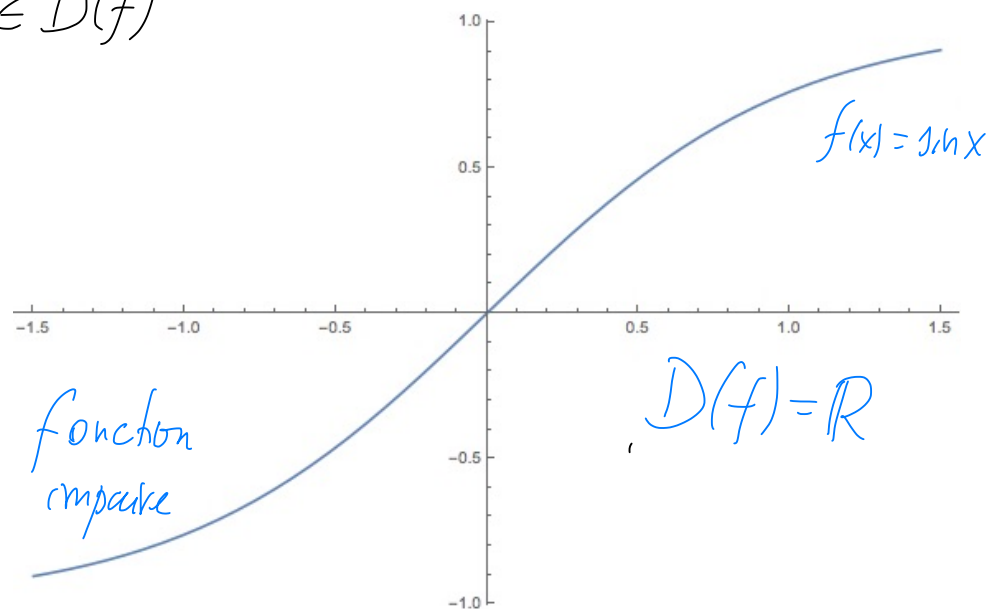
et $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$



(5) f est impaire si

$D(f)$ est symétrique : $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$

et $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$



(6) $f: E \rightarrow F$ est périodique s'il existe $P \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall x \in E \Rightarrow x \pm P \in E \text{ et } f(x \pm P) = f(x) \quad \forall x \in E.$$

P s'appelle une période de f . Alors $\{nP, n \in \mathbb{Z}^*\}$ sont des périodes

Si f est périodique $\Rightarrow x \in E \Rightarrow x + nP \in E \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow E$ n'est pas borné.

Souvent il est possible de trouver la plus petite période : $P > 0$ tel que $\{nP, n \in \mathbb{Z}^*\}$ contient l'ensemble de toutes les périodes de f .

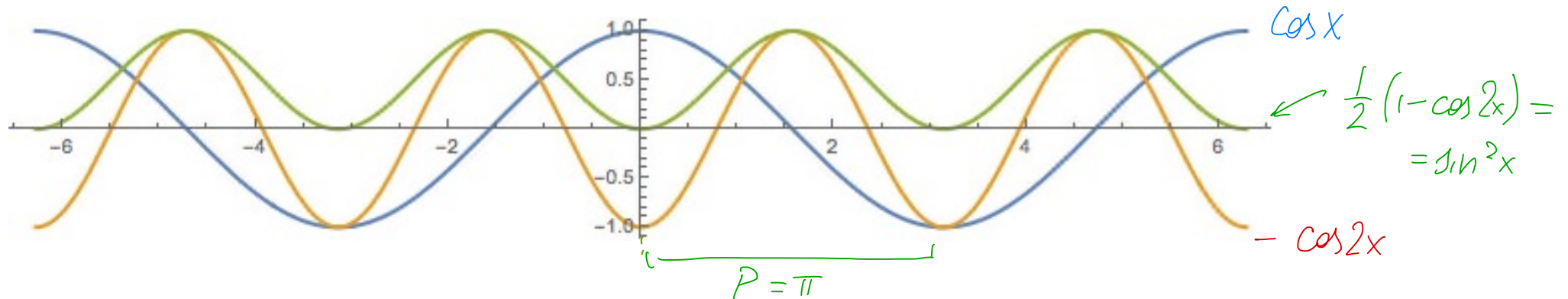
Ex. $f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$\cos x$ est 2π -périodique $\Rightarrow \cos 2x$ est π -périodique

la plus petite période de $\sin^2 x$ est π



Ex. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{Q}$$

$$\overset{x}{\text{rationnel}} + \overset{p}{\text{rationnel}} = \overset{x+p}{\text{rationnel}}$$

$$\overset{x}{\text{irrationnel}} + \overset{p}{\text{rationnel}} = \overset{x+p}{\text{irrationnel}}$$

f est périodique, mais elle n'admet pas de plus petite période.

(7) $f: E \rightarrow F$ est majorée (minorée) sur $A \subset E$ si l'ensemble $f(A) \subset \mathbb{R}$ est majoré (minoré).

Si $f(x)$ est à la fois minorée et majorée sur A , alors elle est bornée sur A .

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)|_{x \in A} \leq M.$$

(8) borne supérieure $\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{dit}}{=} \sup \{f(x), x \in A\}$

borne inférieure $\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{dit}}{=} \inf \{f(x), x \in A\}$

Ex. $f: \underbrace{]0,1[}_A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f(x)$ est bornée sur A
 $\underbrace{f(A)}_{\neq f(A)}$

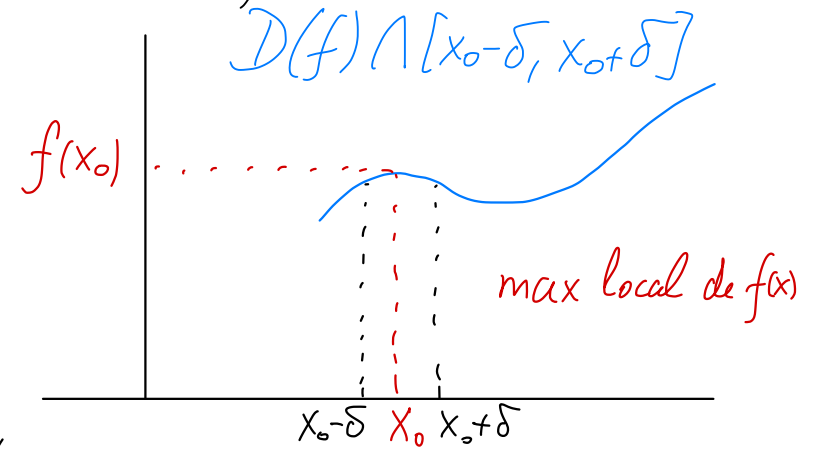
$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{x^2 + 3, x \in]0,1[\} = 4, \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{x^2 + 3, x \in]0,1[\} = 3$$

(9) Maximum et minimum local d'une fonction.

$f: E \rightarrow F$, $x_0 \in E$. Alors f admet un max (min) local au point x_0

s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D(f)$ et tels que $|x - x_0| \leq \delta$,

on a $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$)



(10) Maximum et minimum global d'une fonction

Soit $f: E \rightarrow F$ et M (m) $\in \{f(x), x \in E\} = f(E)$, tel que

$\forall x \in E$ on a $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$)

Alors M est le maximum global (m est le minimum global) de f sur E

Si $f(x_0) = M$

$f(x_0) = m \Rightarrow$ on dit que la fonction atteint son max (min) global sur E au point x_0

Remarque. (1) Si $\max_{x \in E} f(x)$ ($\min_{x \in E} f(x)$) existe $\Rightarrow$

f est majorée (minorée) sur E et $\sup_{x \in E} f(x) = \max_{x \in E} f(x)$ ($\inf_{x \in E} f(x) = \min_{x \in E} f(x)$)

(2) Une fonction bornée sur E n'atteint pas forcément son min ou max sur E

Ex $f(x) = x^2 + 3$ sur $E =]0, 1[$ est bornée, mais elle n'atteint ni son min, ni son max sur E .

(11) Fonction $f: E \rightarrow F$ est surjective

Si $\forall y \in F$ il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

(12) Fonction $f: E \rightarrow F$ est injective

Si $\forall y \in F$ il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$

$$(\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in E \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Remarque Si $f: E \rightarrow F$ n'est pas injective $\Rightarrow$ il faut réduire l'ensemble de départ E
 Si $f: E \rightarrow F$ n'est pas surjective $\Rightarrow$ il faut réduire l'ensemble d'arrivée F .

(13) Si $f: E \rightarrow F$ est à la fois injective et surjective, alors elle est bijjective.

$\forall y \in F \exists$ exactement un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

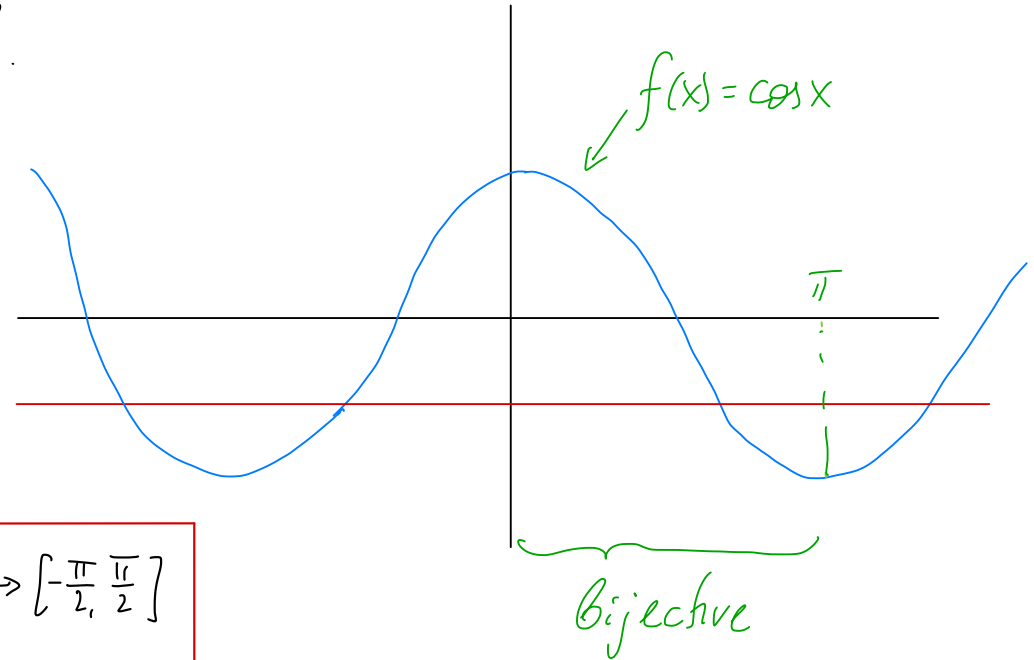
(14) Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque par la formule

$$y = f(x), x \in E \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in F$$

Ex. $f(x) = \cos x: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ n'est pas injective

Elle est bijective sur $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Par convention, on choisit les domaines suivants pour définir les fonctions trigonométriques réciproques:



$$\sin x: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \leadsto \arcsin x: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \leadsto \arccos x: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan x: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \leadsto \arctan x: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

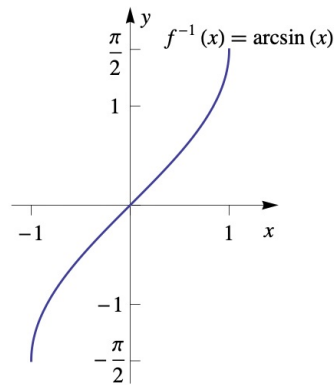
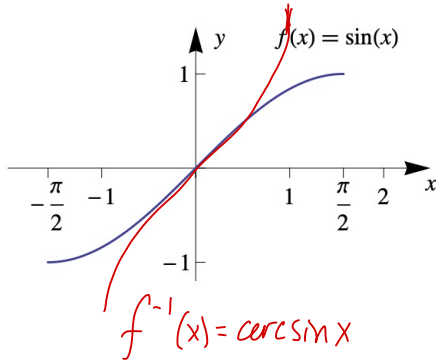
$$\cot x:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \leadsto \operatorname{arccot} x: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

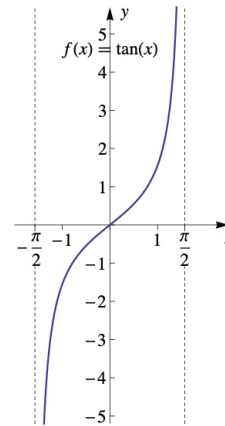
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Fonctions trigonométriques et leur fonctions réciproques.

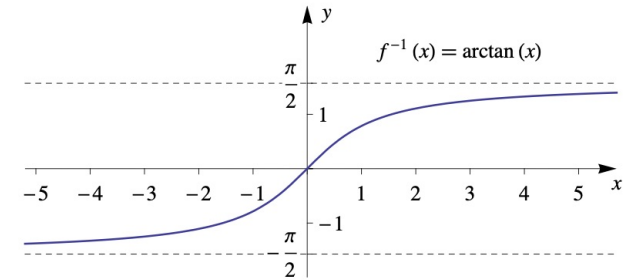
a) $f(x) = \sin x$, $D(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
 $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.



c)

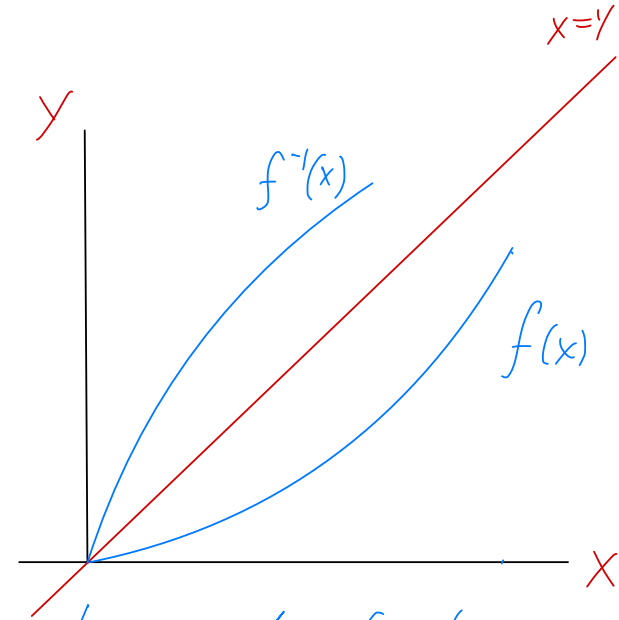
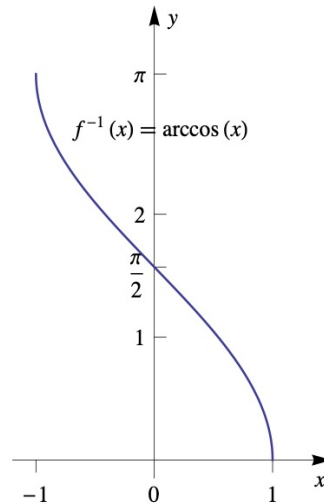
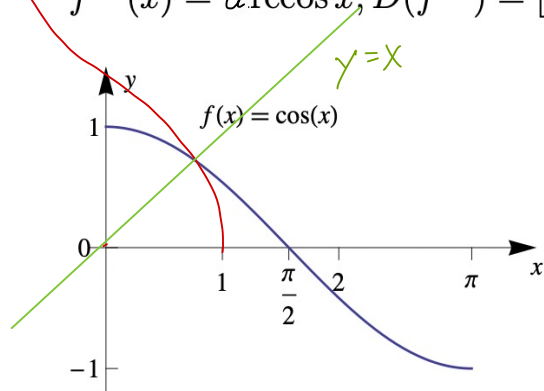


$f(x) = \tan x$, $D(f) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
 $f^{-1}(x) = \arctan x$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.



$f^{-1}(x) = \arccos x$

b) $f(x) = \cos x$, $D(f) = [0, \pi]$.
 $f^{-1}(x) = \arccos x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.



Les graphiques des fonctions réciproques
 sont symétriques par rapport à la
 droite $y = x$.

(15) Composition des fonctions. Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow H$, $E, F, G, H \subset \mathbb{R}$
 Supposons $f(E) \subset G \Rightarrow$ On définit la fonction composée

$$g \circ f(x) = g(f(x)) : E \rightarrow H$$

Supposons $g(G) \subset F \Rightarrow$ On définit la fonction composée

$$f \circ g(x) = f(g(x)) : G \rightarrow F.$$

Ex. $f(x) = \cos x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 3} : \mathbb{R} \rightarrow [\sqrt{3}, +\infty[$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 3}) = \cos(\sqrt{x^2 + 3}) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sqrt{\cos^2 x + 3} : \mathbb{R} \rightarrow [\sqrt{3}, 2] \text{ surjective}$$

Remarque Si $f: E \rightarrow F$ bijective $\Rightarrow \exists f^{-1}$ réciproque, $f^{-1}: F \rightarrow E$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \quad \forall x \in E, \forall y \in F$$

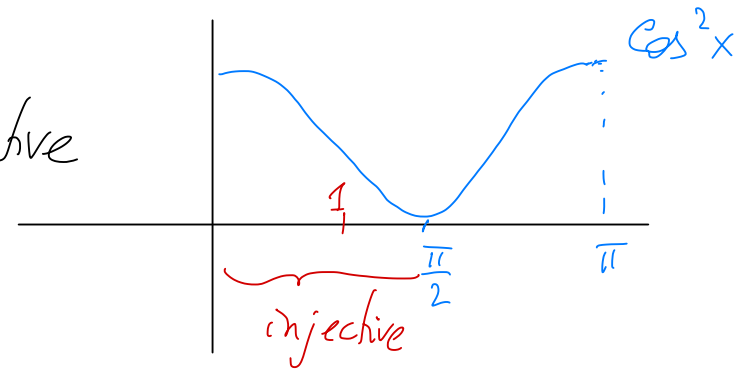
Alors $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in E$

$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \Rightarrow f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in F$

Ex. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)+1}$ Trouver le plus grand ensemble contenant $x=1$ ou f est bijective, et donner une fonction réciproque et son domaine de définition.

$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x)$ est périodique, la plus petite période de f = la plus petite période de $\cos^2 x = \pi$

$\Rightarrow$ on considère $f(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ où f est injective
et $1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\Rightarrow$ On considère $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 1}$; $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
injective.

Il nous faut trouver l'ensemble des valeurs $f([0, \frac{\pi}{2}])$.

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 1}$$

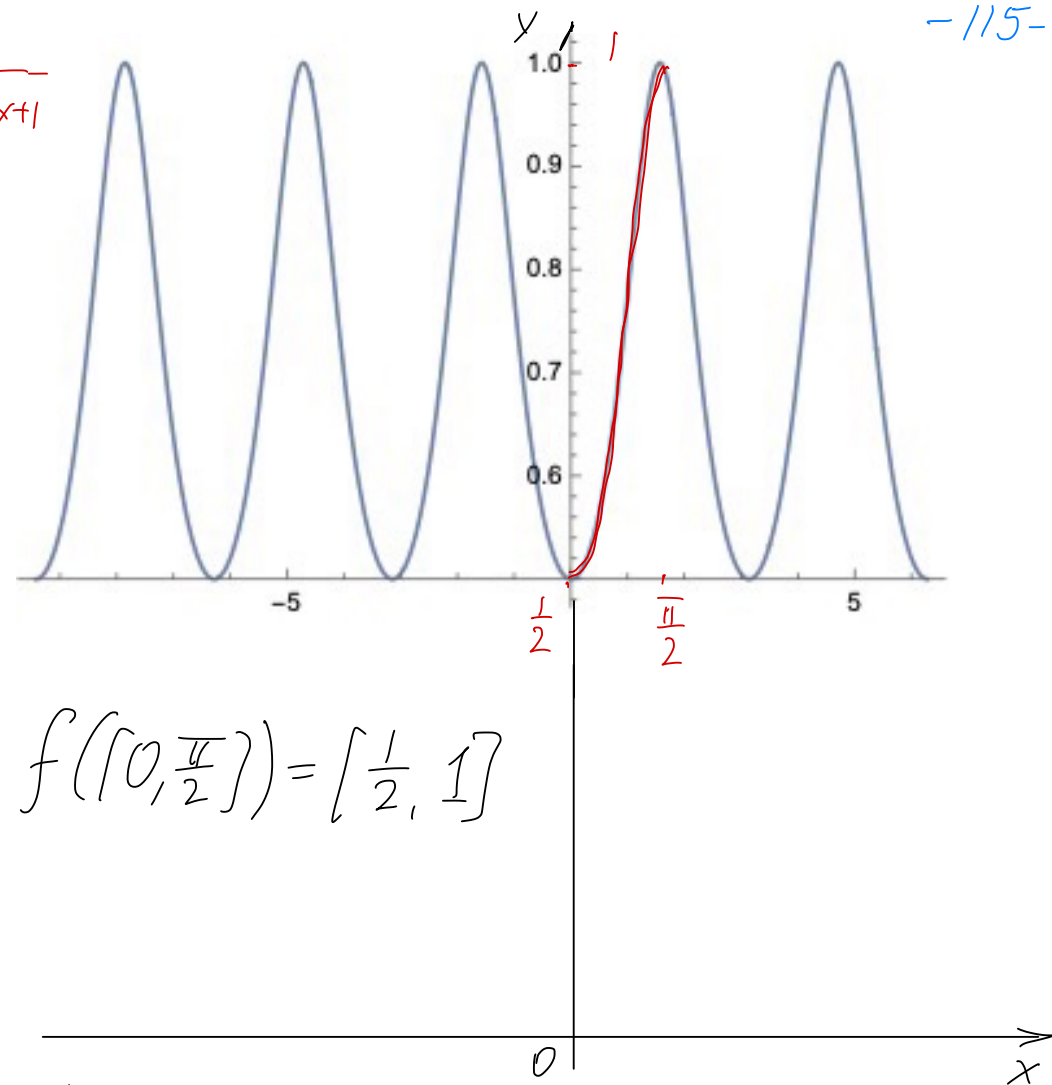
$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 1}$$

$\cos: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante

$\cos^2 x: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 1} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante}$$

$$\Rightarrow \text{trouver } \left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{\cos^2 0 + 1} = \frac{1}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} + 1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f([0, \frac{\pi}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1]$$



$f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ bijective.

$\Rightarrow$ il existe $f^{-1}: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$

Calculer la fonction réciproque.

$$y = \frac{1}{\cos^2 x + 1} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], y \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$$y(\cos^2 x + 1) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{y} - 1$$

$$\Rightarrow \cos x = + \sqrt{\frac{1}{y} - 1} \quad y \neq 0, y \in [\frac{1}{2}, 1]$$

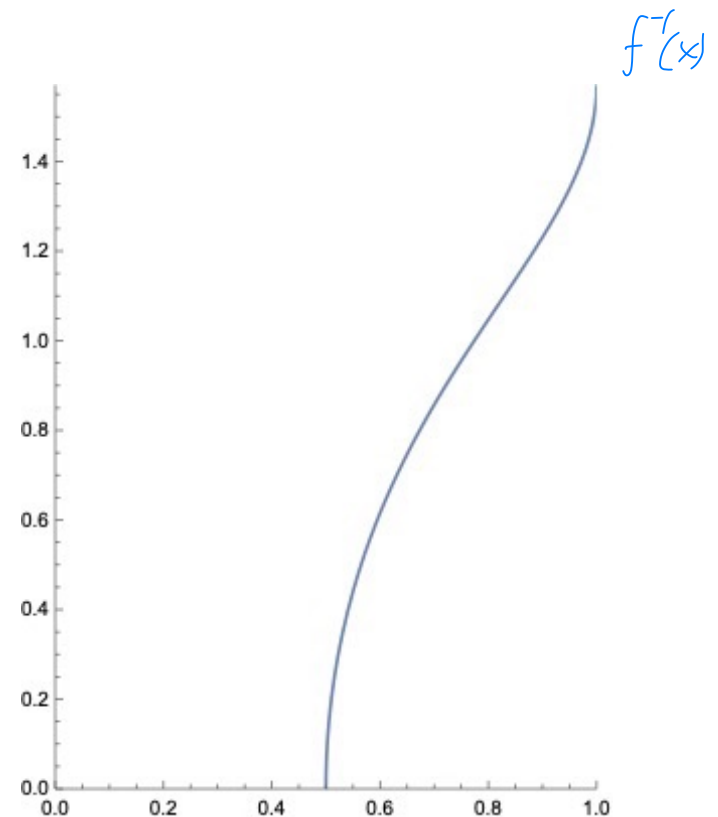
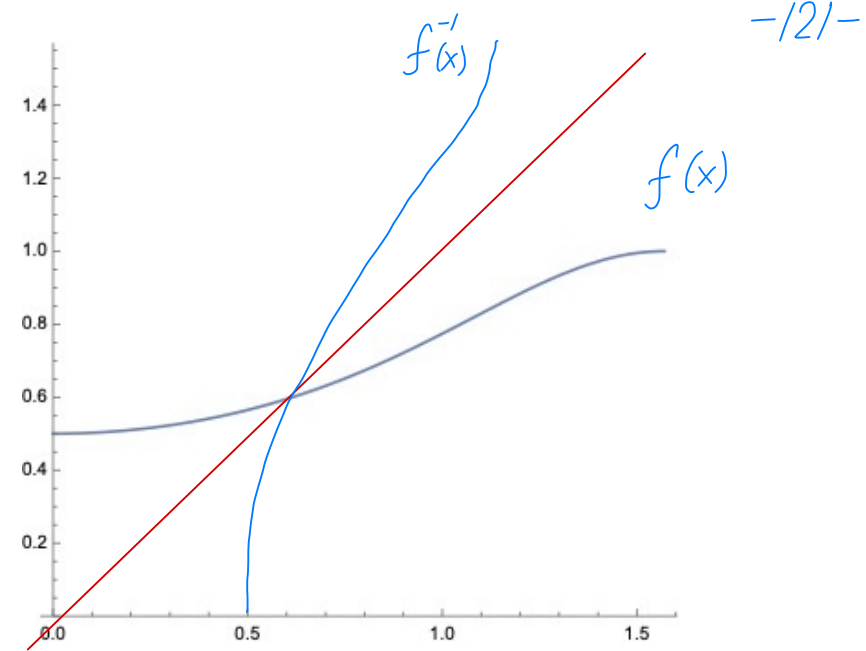
parce que $\cos x > 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$[0, \frac{\pi}{2}] \subset [0, \pi]$ domaine d'image d'arccos.

$$\Rightarrow x = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right)$$

Finalement, $f^{-1}(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right)$

$$f^{-1}: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$$



Question 12 Soit $f(x) = 2 \sin(1-x^2)$ sur le plus grand intervalle où la fonction est bijective et qui contient $x=1$. Alors le domaine de définition et l'ensemble image de sa fonction réciproque f^{-1} sont:

- A. $f^{-1}: [-2, 2 \sin 1] \rightarrow [0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}]$
- B. $f^{-1}: [0, 2 \sin 1] \rightarrow [0, \sqrt{1+\pi}]$
- C. $f^{-1}: [-2 \sin 1, 2 \sin 1] \rightarrow [\sqrt{1-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}]$
- D. $f^{-1}: [-2, 2 \sin 1] \rightarrow [-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}]$
- E. $f^{-1}: [-2 \sin 1, 0] \rightarrow [0, \sqrt{1+\pi}]$

$$f(x) = 2 \sin(1-x^2)$$

$x=1$ est dans l'intervalle

$$y = 2 \sin(1-x^2) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 1-x^2 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -x^2 \leq -1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow 1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \geq x^2 \geq 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$\Rightarrow x^2 \leq 1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}} ; x=1 \in \text{intervalle}$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{D(f) = [0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}]} \quad f \text{ est bijective}$$

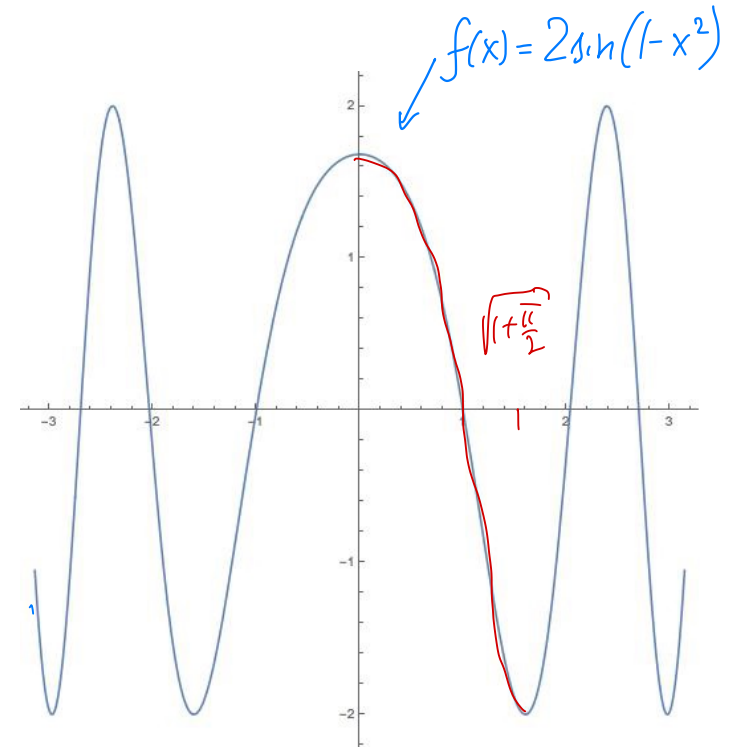
$$\Rightarrow f \text{ est bijective sur } F = [0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}]$$

$$f(0) = 2 \sin(1-x^2) = 2 \sin 1$$

$$f(\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}) = 2 \sin(1 - (1 + \frac{\pi}{2})) = 2 \sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$$

bijective

$$\Rightarrow f: [0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}] \rightarrow [-2, 2 \sin 1]$$



bijeptive

$$\Rightarrow f: [0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}] \rightarrow [-2, 2\sin 1]$$

Calculer f^{-1} :

$$2\sin(1-x^2) = y \Rightarrow \sin(1-x^2) = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow 1-x^2 = \arcsin \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$x^2 = 1 - \arcsin \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{1 - \arcsin \frac{y}{2}} \text{ puisque } 0 \leq x \leq \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \arcsin \frac{x}{2}}}$$

$$f: [0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}] \rightarrow [-2, 2\sin 1]$$

$$f^{-1}: [-2, 2\sin 1] \rightarrow [0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}]$$

