

-96-

Rappel: Ex 1. Série géométrique: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{divergent}, & |r| \geq 1 \end{cases}$

Ex 2. Série harmonique: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

Ex La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente

Dém. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)}_{< 2 \cdot \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right)}_{< 2 \cdot \frac{1}{4^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right)}_{< 2 \cdot \frac{1}{6^2}} + \dots < 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} =$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}_{S_n}$$

$$\Rightarrow S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n \Rightarrow \frac{1}{2} S_n < 1 \Rightarrow S_n < 2$$

$(S_n) \uparrow$; $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Alors $(S_n) \uparrow$ et majorée par 2.

$\Rightarrow (S_n)$ est convergente $\Rightarrow$ La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Remarques. (1) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente pour tout $p > 1$ (Série 7).⁻⁹⁷⁻

(2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler - 1750) Voir „zeta2.pdf“ sur Moodle
 ↖ fonction zêta de Riemann

(3) La fonction zêta de Riemann: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, convergente $s > 1$.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(2k) = C_k (\pi)^{2k}, \quad C_k \in \mathbb{Q}; \quad \zeta(2k) \text{ irrationnel } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ (Euler - 1750)}$$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ est irrationnel (Apery - 1979)}$$

Au moins une valeur entre $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnelle

Hypothèse $\zeta(n)$ sont irrationnels $\forall n \geq 2$ naturel (très très difficile)

Exercice** $\left(\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right) \cdot \zeta(s) = 1 \quad \forall s \geq 2 \text{ naturels.}$

Astuce: $\frac{1}{2^s} \zeta(s) = ? \quad \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s) = ?$ (Voir „zeta2.pdf“ sur Moodle)

Déf Convergence absolue. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est convergente.

Proposition. Une série absolument convergente est convergente.

Dém: Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$; $P_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$. On sait que (P_n) converge.

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |P_m - P_n| \leq \varepsilon = \sum_{k=0}^m |a_k| - \sum_{k=0}^n |a_k|$$

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = |P_m - P_n| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

(S_n) est une suite de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ est convergente
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge



Proposition (Condition nécessaire)

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dém: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ est une suite de Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| \leq \varepsilon, \text{ en particulier } |S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon$$

$$|a_{n+1}| \leq \varepsilon \stackrel{\text{d'f}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$



Remarque. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ n'implique pas la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

§3.2. Critères de convergence.

Proposition. Critère de Leibnitz pour les séries alternées.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série telle que:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série telle que:

- (1) il existe $p \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq p \quad |a_{n+1}| \leq |a_n|$
- (2) — " — — " — $a_{n+1} \cdot a_n \leq 0$ dit alternée
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente

[DZ § 4.2.3]

Ex. Série harmonique alternée : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente par le critère de Leibnitz.

$$(1) \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$$(2) \frac{(-1)}{n} \cdot \frac{1}{n+1} < 0 ; \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)}{n+1} < 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ est convergente} \\ = \ln 2 \text{ (à voir plus tard)}$$

Proposition Critère de comparaison (pour les séries à termes non-négatifs : $a_n \geq 0$)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\exists k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$

Alors : Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dém. (1) Soit $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$, $P_n = \sum_{i=0}^n b_i \Rightarrow 0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \geq k$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m b_i \quad \forall m, n \geq k$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$0 \leq S_m - S_n \leq P_m - P_n \quad \forall m, n \geq k$$

$\Rightarrow$ Si (P_n) est une suite de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ l'est aussi

$\Rightarrow$ Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si (S_n) diverge, $(S_n) \uparrow \Rightarrow (S_n)$ n'est pas bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$; $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k \Rightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty \Rightarrow \sum b_n$ divergent. $\square$

-101-

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ Considérons $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$ $|\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergente.

$\Rightarrow \sum \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$ est convergente par le critère de comparaison

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ est absolument convergente $\Rightarrow$ convergente.

Remarque. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ possède que de termes **positifs** (**négatifs**), et la suite des sommes partielles est **majorée** (**minorée**), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

Proposition. Critère de d'Alembert (pour les séries)

Soit (a_n) une suite : $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R}$

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument

si $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

si $\rho = 1 \Rightarrow$ pas de conclusion $\ddot{:}$

Idée: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Proposition Critère de Cauchy (de la racine).

-102-

Soit (a_n) une suite et $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in \mathbb{R}$ (généralisation: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument

Si $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Idee: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Remarques. (1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \Rightarrow$ alors $r = \ell$.

(2) Parfois $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'existe pas (Voir exemple dans Série 7)

(3) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors pas de conclusion sur la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

-103-

Ex. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n)!}$ Critère de d'Alembert: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{10^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n \cdot n!} =$

$$= 10 \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{10(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5 \cdot \cancel{2(n+1)}}{\cancel{2(n+1)} \cdot (2n+1)} = \frac{5}{(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5}{2n+1} \right| = 0 = \rho < 1 \Rightarrow \text{par le critère de d'Alembert}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n)!} \text{ converge.}$$

(2) Série avec paramètre $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x \in \mathbb{R}$ un paramètre

Par le critère de d'Alembert $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^{k+1}|}{(k+1)!} \frac{k!}{|x^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ converge absolument } \forall x \in \mathbb{R}$$

On verra plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Question 11

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x^n}{3n+1} \right)^{2n+1}$ converge si et seulement si

A $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$

B $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

C $|x| < 1$

D $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

E $0 < x < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2nx}{3n+1} \right)^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Critère de Cauchy : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2nx}{3n+1} \right|^{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2x}{3+\frac{1}{n}} \right|^{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2x}{3+\frac{1}{n}} \right|^2 \cdot \sqrt[n]{\left| \frac{2x}{3+\frac{1}{n}} \right|} = \left| \frac{2x}{3} \right|^2$

$$\sqrt[n]{\frac{2|x|}{4}} < \sqrt[n]{\frac{2|x|}{3+\frac{1}{n}}} < \sqrt[n]{\frac{2|x|}{3}}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1 \quad 1$

$\left| \frac{2x}{3} \right|^2 \quad \leftarrow \quad \leftarrow 1$

Si $\frac{4x^2}{9} < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{2} \Rightarrow$ converge abs.

Enfinement: la série converge $\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$

Si $\frac{4x^2}{9} > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{3}{2} \Rightarrow$ diverge

Si $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n \cdot \frac{3}{2}}{3n+1} \right)^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{2n+1}$ Condition nécessaire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{2n+1} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right) \left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{e^{2/3}} \neq 0 \Rightarrow \text{div.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Si $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n \cdot \frac{3}{2}}{3n+1} \right)^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{2n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^{2n+1}$ divergente