Sous-suites. Suites de Cauchy

Déf Une sous-suite d'une suite (a_n) est une suite $k \to a_{n_k}$,
où $k \to n_k$ est une suite strictement croissante de nombres naturels.

Ex. $a_n = (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad (a_{2k}) \subset (a_n) \quad \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$

$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad (a_{2k+1}) \subset (a_n) \quad \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$

mais (a_n) est divergente

Proposition. (convergence d'une sous-suite).

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow$ toute sous-suite (a_{n_k}) converge aussi vers ℓ.

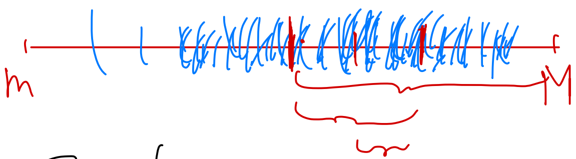
Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon \overset{\text{déf}}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans toute suite bornée il existe une sous-suite convergente.

Idée: $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq (a_n) \leq M \Rightarrow$ On divise l'intervalle $[m, M]$ par 2

On retient la moitié contenant un nombre ∞ d'éléments de (a_n)



Puis on recommence. La longueur des intervalles $= \dfrac{M-m}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En choisissant un élément dans chaque intervalle plus loin dans la suite, on obtient une sous-suite convergente.

Suites de Cauchy

Déf La suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $\forall m \geq n_0$ $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

Proposition. Une suite (a_n) est une suite de Cauchy $\overset{\text{si et seulement si}}{\Longleftrightarrow}$ (a_n) est convergente.

Idée: $(\Rightarrow)$ (1) Une suite de Cauchy est bornée

(2) Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ $\exists$ une sous-suite convergente

(3) Cauchy + sous-suite convergente $\Rightarrow$ la suite est convergente

$(\Leftarrow)$ Inégalité triangulaire: $|a_p - a_q| \leq |a_p - \ell| + |\ell - a_q| \leq 2\varepsilon$

Voir [DZ, § 3.7.4]

Remarque. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0 \ \forall k\in\mathbb{N}$ n'implique pas que (a_n) est une suite de Cauchy

Ex. $a_n=\sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})(\sqrt{n+k}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=0$

Mais $a_n=\sqrt{n}\longrightarrow\infty$ est divergente

$\Rightarrow$ (a_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Explication Soit $k\in\mathbb{N}$: $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$. Alors $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0$ $|a_{n+k}-a_n|\leq\varepsilon$ (k est fixé). Donc n_0 peut dependre de k. Si $a_n=\sqrt{n}$, si on augmente k, on va trouver n_0 toujours plus grand pour le même $\varepsilon>0$.

Mais dans la propriété de Cauchy, n_0 est le même pour toute difference d'indices $(m-n)$: $\varepsilon>0\Rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n,m\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a_m|\leq\varepsilon$.

Donc la propriété de Cauchy est plus forte que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$

Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée.

Déf Soit (x_n) une suite bornée : $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \le x_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $y_n = \sup\{x_k, k \ge n\}$ $\quad y_n \downarrow \quad y_n \ge x_n \ge m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la suite $z_n = \inf\{x_k, k \ge n\}$ $\quad z_n \uparrow \quad z_n \le x_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors:

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \lim y_n \overset{\text{déf}}{=} \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \\ \exists \lim z_n \overset{\text{déf}}{=} \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}}$$

$\left.\begin{array}{l} (y_n)\downarrow, \text{ minorée par } m \\ (z_n)\uparrow, \text{ majorée par } M \end{array}\right\} \quad z_n \le x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ex 1. $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $n \ge 1$ bornée : $-2 \le (x_n) \le 2 \leftarrow$ majorant

$$x_n = \big(\underset{n=1}{-2},\ \underset{2}{1+\tfrac{1}{4}},\ \underset{3}{-1-\tfrac{1}{9}},\ \underset{4}{1+\tfrac{1}{16}},\ \underset{5}{-1-\tfrac{1}{25}}, \ldots$$

$$y_n = \left(1+\tfrac{1}{4},\ 1+\tfrac{1}{4},\ 1+\tfrac{1}{16},\ 1+\tfrac{1}{16},\ \ldots\ 1+\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)^2}\ \ldots\right) \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

$$z_n = \left(-2,\ -1-\tfrac{1}{9},\ -1-\tfrac{1}{9},\ -1-\tfrac{1}{25}\ \ldots\ -1-\frac{1}{\left(n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^2}\ \ldots\right) \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = -1$$

$\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$

Remarque: Si $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$

On a: $\underset{\ell}{\underset{\downarrow}{z_n}} \le x_n \le \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{y_n}}$ Par les 2 gendarmes $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$

Proposition Une suite bornée (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \ell \qquad \text{(Voir DZ).}$$

Ex 1. $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$

On a calculé $\limsup x_n = 1$, $\liminf x_n = -1$ $\Rightarrow$ la suite est divergente.

Ex 2. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ Trouver y_n, z_n, $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

$$(x_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots\right)$$

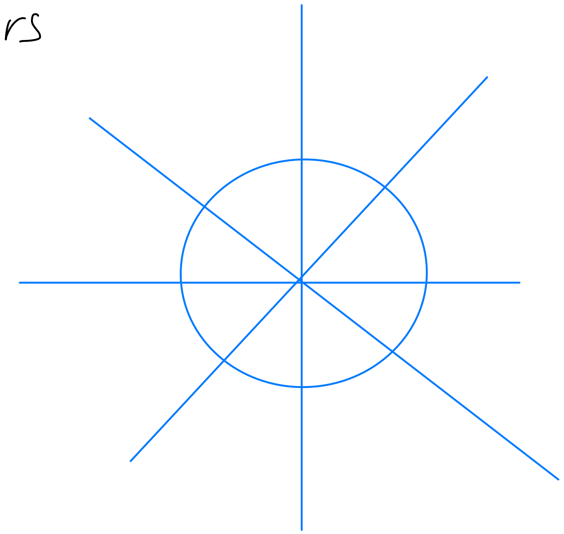
$$y_n = \sup\{x_k, k \geq n\} = (1, 1, 1 \dots) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$z_n = \inf\{x_k, k \geq n\} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots \frac{n}{n+1} \dots\right) \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

(x_n) convergente, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

Question 10

Soit $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Alors



A. $\liminf a_n = -1$ et $\limsup a_n = 1$

B. $\liminf a_n = \limsup a_n$

C. $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\limsup a_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\liminf a_n = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\limsup a_n = 1$.

E. $\liminf a_n = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\limsup a_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$a_n = \Big(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}+1,\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+0,\ 0-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\ -1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+0,\ 0+\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{périodique mod } 8},\ \ldots$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Chapitre 3. Séries numériques

Définitions et exemples.

Déf La série de terme général a_n est un couple
(1) la suite (a_n)
(2) la suite des sommes partielles $S_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ — Série de terme général a_k.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $n$ième somme partielle.

Déf Série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\stackrel{déf}{\Longleftrightarrow}$ la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$, on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers ℓ

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell}$$

Si (S_n) est divergente, alors on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est divergente

En particulier, si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

Ex 0. $\sum_{n=0}^{\infty} n$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\geq 1}{\geq} n$ n'est pas bornée

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$ divergente.

Ex 1. **Série géométrique** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

Rappel: $(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = S_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2$

0 suite géométrique $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2}$$

D'une manière similaire on obtient $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad |r|<1}$ Série géométrique

Exercice: $\sum_{k=0} r^k$ est divergente, si $|r| \geq 1$.

(1) $|r| > 1 \Rightarrow$ la suite $S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente

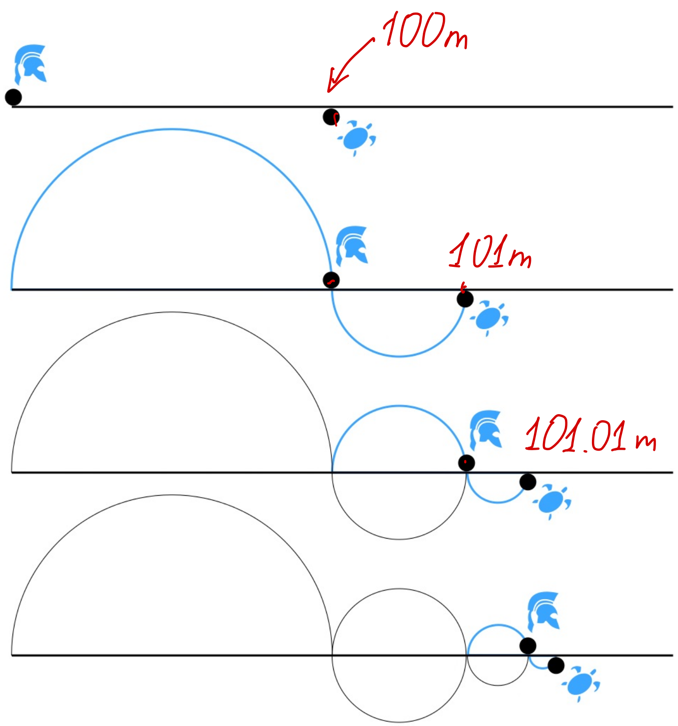
(2) $r = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} 1 = S_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$ divergente

(3) $r = -1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = S_n : (1, 0, 1, 0, 1, \ldots\ldots) \Rightarrow (S_n)$ est divergente.

$S_n = 1-1+1-1+1-\ldots$

Le paradoxe d'Achille et de la tortue (Zénon, ~450 av. J.C.)

Achille: $10\,\frac{m}{s}$
La tortue: $0.1\,\frac{m}{s}$



Zénon : Achille ne pourra jamais rattraper la tortue s'il la accorde une avance de 100m (par exemple).

Achille → +100m ⇒ la tortue ⇒ +1m
Achille → +1m ⇒ la tortue ⇒ +1cm.

Ainsi, chaque fois la tortue se retrouve encore plus loin qu'Achille.

Considérons le temps quil faudrait à Achille pour rattraper la tortue.

$$T = \frac{100m}{10\frac{m}{s}} + \frac{1m}{10\frac{m}{s}} + \frac{0.01m}{10\frac{m}{s}} + \dots = 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \dots = 10\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots\right)}_{\text{Série géométrique},\ r=\frac{1}{100}}$$

$$= 10 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 10 \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{1000}{99}\,s.$$

⇒ Achille rattrapera la tortue après $\frac{1000}{99}$ secondes.

Conclusion : D'aprés Zenon, l'impossibilité pour Achille de rattraper la tortue vient du fait qu'il lui faudrait courir un nombre infini d'intervalles.
Mais d'après notre calcul, une somme infinie d'intervalles de décroissance géométrique converge vers une longueur finie.

Ex2. Série harmonique.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$ Cette série est divergente

Dém Supposons $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad ; \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6 \quad S_7 \dots$ (S_{2n}) est une sous-suite de (S_n)

$S_2 \quad S_4 \quad S_6$ Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{<2n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{<2n} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq 2n} \geq \left(\frac{1}{2n}\right)\cdot n = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$n \to \infty$

$$0 = S - S \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2} \text{ absurde.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ est divergente.}$$