

Vorwort zum Skript und Einführung

Herbstsemester 24/25

Datum: 2. September 2024

Vorwort zum Skript

Das Skript, bestehend aus den Kapiteln 1 - 7, wurden von Prof. Dr. D. Kressner an der Fakultät für Mathematik der EPFL im Herbst 2022 erstellt. (In manchen Kapiteln ist das Skript unter Umständen leicht verändert, zum Beispiel um den prüfungsrelevanten Anforderungen dieses Jahres zu entsprechen.)

Zur Vorbereitung des Skriptes wurden unter anderem das Buch “Calcul Différentiel et Intégral” von Jacques Douchet und Bruno Zvahlen, PPUR, 2018 und das Skript “Analyse I pour sections d’ingénierie” von David Strütt (EPFL) benutzt.

Mit ★ gekennzeichnete Abschnitte sind Zusatzmaterial und insbesondere nicht Teil der Prüfungsstoffs.

Für Fragen bezüglich des vorliegenden Skripts wenden Sie sich bitte an tobias.schmid@epfl.ch

Einführung

"Eine Menge [ensemble] ist die (ungeordnete) Zusammenfassung wohl unterscheidbarer Objekte (Elemente) zu einem Ganzen." (Georg Cantor)

Wichtige Mengen von Zahlen sind zum Beispiel $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sowie die leere Menge $M = \emptyset = \{\}$ die keine Elemente enthält.

Sei M eine solche Menge. Wir sagen " x ist ein Element von M ", in Zeichen $x \in M$, falls x zur Menge M zugehörig ist (andernfalls schreiben wir $x \notin M$ wenn das nicht der Fall ist).

Für eine weitere Menge A sagen wir " A ist Teilmenge (oder Untermenge) von M ", in Zeichen $A \subseteq M$ or auch $A \subset M$, falls aus $x \in A$ stets $x \in M$ folgt (Alle Elemente von A sind auch Elemente von M).

Zur Notation von Mengen: Sei $B(x)$ eine Aussage (Bedingung), die von einem Element x einer Menge abhängig ist. Dann bezeichnet $M = \{x \mid B(x)\}$ die Menge aller x für die Bedingung $B(x)$ gültig ist.

Bool'sche Mengenoperationen: Seien A, B, D Mengen und $A \subset D$.

$$\begin{aligned} A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \quad \text{Schnitt von } A \text{ und } B, \\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \quad \text{Vereinigung von } A \text{ und } B, \\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} \quad \text{Differenz von } A \text{ und } B, \\ A^c &= \{x \in D \mid x \notin A\} \quad \text{Komplement von } A \text{ in } D. \end{aligned}$$

Zahlbereiche

Die *natürlichen Zahlen* [entiers naturels] sind mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ bezeichnet. Die Gleichung $m + n = 0$ kann für $m, n \in \mathbb{N}^1$ nur durch $m = n = 0$ gelöst werden.

Die *ganzen Zahlen* [entiers relatifs] sind mit $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ bezeichnet (Klar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). Die Gleichung $m \cdot n = 1$ kann für $m, n \in \mathbb{Z}$ nur durch $m = n = 1$ gelöst werden.

Die *rationalen Zahlen* [nombres rationnels] sind mit $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$ bezeichnet (Klar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Reicht uns das? Antwort: Nein, denn zum Beispiel

$$\begin{aligned} \pi &\quad \text{Fläche des Einheitskreises, } e \quad \text{Die Euler'sche Zahl,} \\ \sqrt{2} &\quad \text{Länge der Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge } = 1, \dots \end{aligned}$$

sind *irrational* (das heisst $\notin \mathbb{Q}$). Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sollen als Erweiterung (von $\mathbb{Q}$) im ersten Kapitel so konstruiert werden, dass insbesondere auch oben genannte Zahlen enthalten sind. Wir beweisen zuerst $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ durch einen Widerspruchsbeweis.

¹Damit meinen wir $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$