

Kapitel 7

Integralrechnung

7.1 Flächeninhalte unter Funktionen

Als einleitendes Beispiel betrachten wir die Berechnung des Flächeninhalts unterhalb der Funktion $1/x$ im Intervall $[1, 2]$, siehe Abbildung 7.1.

Auf den ersten Blick scheint es gar nicht so einfach, diesen Flächeninhalt zu berechnen. Deswegen werden wir ihn zunächst approximieren. Wir unterteilen dazu das Intervall sukzessive in Teilintervalle, zum Beispiel in $[1, 1.5]$ und $[1.5, 2]$. Es ist klar, dass sich der Flächeninhalt über $[1, 2]$ gerade als Summe der Flächeninhalte über $[1, 1.5]$ und $[1.5, 2]$ ergibt. Nun approximieren wir $1/x$ auf jeden Teilintervall durch eine konstante Funktion; dies aber auf zwei unterschiedliche Weisen. Einmal wählen wir den maximalen Wert des Funktionswerts im Teilintervall als Konstante, also

$$\begin{aligned}\bar{t}(x) &= \begin{cases} \max_{y \in [1, 1.5]} \frac{1}{y} & \text{für } x \in [1, 1.5] \\ \max_{y \in [1.5, 2]} \frac{1}{y} & \text{für } x \in [1.5, 2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [1, 1.5] \\ \frac{2}{3} & \text{für } x \in [1.5, 2] \end{cases}\end{aligned}$$

und einmal wählen wir den minimalen Wert:

$$\begin{aligned}\underline{t}(x) &= \begin{cases} \min_{y \in [1, 1.5]} \frac{1}{y} & \text{für } x \in [1, 1.5] \\ \min_{y \in [1.5, 2]} \frac{1}{y} & \text{für } x \in [1.5, 2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } x \in [1, 1.5] \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in [1.5, 2] \end{cases}\end{aligned}$$

Per Definition begrenzen $\bar{t}(x)$ und $\underline{t}(x)$ die Originalfunktion von oben bzw. unten,

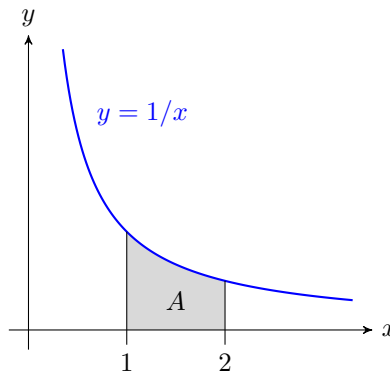


Abbildung 7.1. Fläche unterhalb von $1/x$ im Intervall $[1, 2]$.

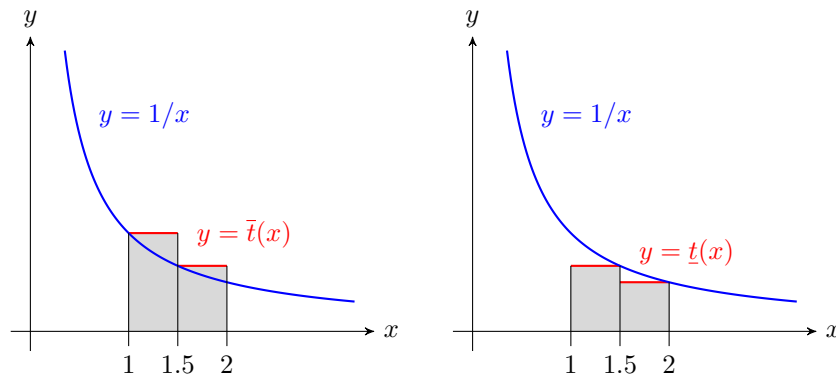


Abbildung 7.2. Approximation der Fläche unterhalb von $1/x$ auf zwei Teilintervallen.

siehe auch Abbildung 7.2. Entsprechend wird auch der Flächeninhalt der Originalfunktion von oben bzw. unten durch die Flächeninhalte von $\bar{t}(x)$ und $\underline{t}(x)$ begrenzt. Diese setzen sich aber aus Rechtecken zusammen und lassen sich einfach ausrechnen:

$$\text{Flächeninhalt von } \bar{t} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 0.8333 \dots$$

$$\text{Flächeninhalt von } \underline{t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} = 0.58333 \dots$$

Die beiden Zahlen sind leider nicht sehr nah; man erhält also keine besonders gute Approximation zum Flächeninhalt der Originalfunktion. Diese lässt sich aber leicht verbessern, indem wir die Intervallunterteilung verfeinern.

Betrachte jetzt für die 10 Teilintervalle

$$[1, 1.1], \quad [1.1, 1.2], \quad \dots, \quad [1.9, 2],$$

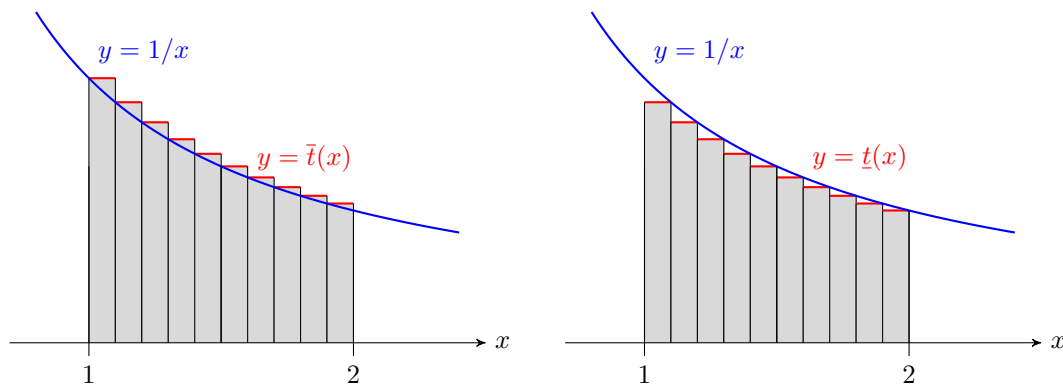


Abbildung 7.3. Approximation der Fläche unterhalb von $1/x$ auf 10 Teilintervallen.

die entsprechenden “Treppenfunktionen” $\bar{t}$ und $\underline{t}$, siehe Abbildung 7.3. Dann ergibt sich

$$\text{Flächeninhalt von } \bar{t} = 0.718771\dots, \quad \text{Flächeninhalt von } \underline{t} = 0.668771\dots,$$

was schon ein wesentlich besser aussieht. Dieses Spiel kann beliebig fortgesetzt werden. Bei 100 Teilintervallen der Länge $1/100$ ergibt sich

$$\text{Flächeninhalt von } \bar{t} = 0.695653\dots, \quad \text{Flächeninhalt von } \underline{t} = 0.690653\dots$$

Zum Beispiel liegt die Zahl $\log(2) = 0.6931471\dots$ zwischen diesen beiden Werten, was natürlich kein Zufall ist!

7.2 Definition des bestimmten Integrals

Wir wollen die obigen Betrachtungen nun formalisieren. Für ein gegebenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ nennen wir eine Menge der Form

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{mit} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

eine **Partition** [*subdivision*] (auch: Intervallunterteilung) von $[a, b]$. Eine solche Partition entspricht gerade n Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$ der Länge $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $j = 1, 2, \dots, n$. Für $f \in C([a, b])$ existieren

$$M_j = \max_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x), \quad m_j = \min_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Entsprechend definieren wir zwei stückweise konstante Funktionen (**Treppenfunktion** [*fonction en escalier*])

$$\bar{t}_\sigma(x) = \begin{cases} M_1 & \text{für } x \in [x_0, x_1[\\ M_2 & \text{für } x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ M_n & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad \underline{t}_\sigma(x) = \begin{cases} m_1 & \text{für } x \in [x_0, x_1[\\ m_2 & \text{für } x \in [x_1, x_2[\\ \vdots & \\ m_n & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Die Fläche unterhalb von $\bar{t}_\sigma(x)$ bzw. $\underline{t}_\sigma(x)$ ergibt sich als Summe der Flächen der Rechtecke mit Grundseite h_j und Höhe M_j bzw. m_j :

$$\bar{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^n M_j h_j, \quad \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^n m_j h_j.$$

Es ist klar, dass $\bar{S}_\sigma(f)$ eine obere Schranke für den Flächeninhalt von f auf $[a, b]$ ist; man nennt sie deshalb **Obersumme** [*somme de Darboux supérieure*]. Entsprechend ist $\underline{S}_\sigma(f)$ eine untere Schranke und wird deshalb **Untersumme** [*somme de Darboux inférieure*] genannt.

Lemma 7.1 Für zwei Partitionen $\sigma, \tilde{\sigma}$ von $[a, b]$ sei $\sigma \subset \tilde{\sigma}$. Dann gilt

$$\bar{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \leq \bar{S}_\sigma(f), \quad \underline{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \geq \underline{S}_\sigma(f).$$

Beweis. Betrachte die beiden durch $\sigma, \tilde{\sigma}$ definierten Treppenfunktionen $\bar{t}_\sigma$ und $\bar{t}_{\tilde{\sigma}}$ an einer beliebigen Stelle $\xi \in [a, b]$. Dann liegt ξ in einem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ der Partition σ und in einem Intervall $[\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$ der Partition $\tilde{\sigma}$. Aus $\sigma \subset \tilde{\sigma}$ folgt $[\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i] \subset [x_{j-1}, x_j]$ und somit

$$M_j = \max_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y) \geq \max_{y \in [\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]} f(y) = \tilde{M}_i.$$

Aus der Definition von $\bar{t}_\sigma, \bar{t}_{\tilde{\sigma}}$ folgt

$$\bar{t}_\sigma(\xi) = M_j \geq \tilde{M}_i = \bar{t}_{\tilde{\sigma}}(\xi).$$

Da ξ beliebig, ist die Funktion $\bar{t}_\sigma$ also nie kleiner als $\bar{t}_{\tilde{\sigma}}$. Damit kann auch ihr Flächeninhalt $\bar{S}_{\tilde{\sigma}}(f)$ nicht kleiner sein: $\bar{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \leq \bar{S}_\sigma(f)$. Analog zeigt man $\underline{S}_{\tilde{\sigma}}(f) \geq \underline{S}_\sigma(f)$. $\square$

Aus Lemma 7.1 folgt, dass die Unter- und Obersummen beschränkt sind. Dies sieht man aber auch leichter:

$$m(b-a) \leq \underline{S}_\sigma(f) \leq \bar{S}_\sigma(f) \leq M(b-a)$$

mit $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ und $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Also dürfen wir Infimum und Supremum bilden:

$$\bar{S}(f) = \inf \{ \bar{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ ist Partition von } [a, b] \}, \\ \underline{S}(f) = \sup \{ \underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ ist Partition von } [a, b] \}.$$

Theorem 7.2 Für $f \in C([a, b])$ gilt

$$\overline{S}(f) = \underline{S}(f).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da $f \in C([a, b])$, ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig, siehe Theorem 5.29. Also gibt es $\delta > 0$ so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Sei jetzt σ eine genügend feine Partition, so dass die maximale Intervalllänge $h_\sigma = \max_{j=1, \dots, n} h_j = \max_{j=1, \dots, n} x_j - x_{j-1}$ die Beziehung $h_\sigma \leq \delta$ erfüllt. Insbesondere folgt dann

$$0 \leq M_j - m_j \leq \varepsilon$$

für die maximalen und minimalen Funktionswerte im j -ten Intervall, und damit

$$0 \leq \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) h_j \leq \varepsilon \sum_{j=1}^n h_j = (b - a) \varepsilon.$$

Direkt aus den Definitionen von $\overline{S}(f)$ und $\underline{S}(f)$ ergibt sich, dass Partitionen σ_1 und σ_2 existieren mit $h_{\sigma_1} \leq \delta, h_{\sigma_2} \leq \delta$, so dass

$$0 \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f) - \overline{S}(f) \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \underline{S}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \leq \varepsilon.$$

Wegen Lemma 7.1 bleiben diese Ungleichungen gültig, wenn man σ_1 und σ_2 jeweils durch die Vereinigung der beiden Partitionen $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ersetzt. Also folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\overline{S}(f) - \underline{S}(f)| &\leq |\overline{S}(f) - \underline{S}_\sigma(f)| + |\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f)| + |\underline{S}_\sigma(f) - \underline{S}(f)| \\ &\leq (b - a + 2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, muss $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ gelten. $\square$

Die Aussage von Theorem 7.2 erlaubt es uns nun, die folgende Definition, auch **Riemannsches Integral** [*Intégrale de Riemann*] genannt, zu treffen.

Definition 7.3 Das (bestimmte) **Integral** von $f \in C([a, b])$ über $[a, b]$ [*intégrale de f sur $[a, b]$*] ist wie folgt definiert:

$$\int_a^b f(x) dx := \overline{S}(f) = \underline{S}(f).$$

Einige Anmerkungen zur Namensgebung:

- a heisst **untere Integrationsgrenze** [*borne inférieure*];
- b heisst **obere Integrationsgrenze** [*borne supérieure*];
- $[a, b]$ heisst **Intervall der Integration** [*l'intervalle d'intégration*];
- x heisst **Integrationsvariable** [*variable d'intégration*];
- $f(x)$ heisst **Integrand**¹ [*fonction à intégrer*]

Eine weitere Folgerung von Theorem 7.2 ist, dass wir eine beliebige Folge von Partitionen betrachten können. Solange die maximale Teilintervalllänge $h_\sigma = \max_{j=1, \dots, n} x_j - x_{j-1}$ gegen Null strebt, so streben auch die entsprechenden Ober- und Untersummen gegen das bestimmte Integral (siehe auch Abschnitt 7.1.8 in [DZ]).

Beispiel 7.4 Wir betrachten das einführende Beispiel: $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $[1, 2]$. Wir wählen die von $N \geq 1$ abhängige Partition

$$\sigma = \{2^{k/N} \mid k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Es gilt

$$x_k - x_{k-1} = 2^{k/N} - 2^{(k-1)/N} = 2^{(k-1)/N} (2^{1/N} - 1) < 2(2^{1/N} - 1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

und damit auch $h_\sigma = \max_{k=1, \dots, N} x_k - x_{k-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} \overline{S}_\sigma(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1 \right) = \sum_{k=1}^N (2^{1/N} - 1) = N(2^{1/N} - 1), \\ \underline{S}_\sigma(f) &= \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{x_{k-1}}{x_k} \right) = \sum_{k=1}^N (1 - 2^{-1/N}) = N(1 - 2^{-1/N}). \end{aligned}$$

Nach L'Hôpital erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N(2^{1/N} - 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2^{1/N} - 1}{1/N} = \log 2$$

und analog $\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - 2^{-1/N}) = \log 2$. Also folgt

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \overline{S}(f) = \underline{S}(f) = \log 2,$$

wie bereits vermutet. ◇

¹Nicht zu verwechseln mit dem Intriganten!

Bemerkung 7.5 Der Einfachheit halber haben wir oben immer angenommen, dass f stetig ist. Die Beziehung $\overline{S}(f) = \underline{S}(f)$ gilt aber für eine weitaus grössere Klasse von Funktionen, für die dann $\int_a^b f(x) dx$ auch wohl definiert. Zum Beispiel trifft dies auf stückweise stetige Funktionen zu; siehe Abschnitt 7.3.12 in [DZ]. Verlässt man aber die Klasse der stetigen Funktionen, muss man sich auf Überraschungen gefasst machen.

Zum Beispiel hat eine stetige Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ die wichtige Eigenschaft, dass $\int_a^b f(x) dx$ nur Null werden kann, wenn $f(x) \equiv 0$ gilt. Diese Eigenschaft geht bei unstetigen Funktionen verloren; betrachte zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier ist $\int_{-1}^1 f(x) dx = \overline{S}(f) = \underline{S}(f) = 0$ obwohl f nicht identisch Null ist.

7.3 Grundlegende Eigenschaften von $\int_a^b f(x) dx$

Die folgenden Eigenschaften ergeben sich direkt aus Definition 7.3:

- $\int_a^b f(x) dx$ hängt nicht von der Bezeichnung der Integrationsvariablen ab. Beispiel: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.
- Für jedes $c \in [a, b]$ gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Als Konvention definieren wir

$$\int_c^c f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_c^a f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx,$$

wobei $a < c$.

- Integration ist eine lineare Operation, dies heisst

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Theorem 7.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Sei $f \in C([a, b])$. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ so dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Beweis. Seien $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ und $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Es gelten dann die Ungleichungen

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

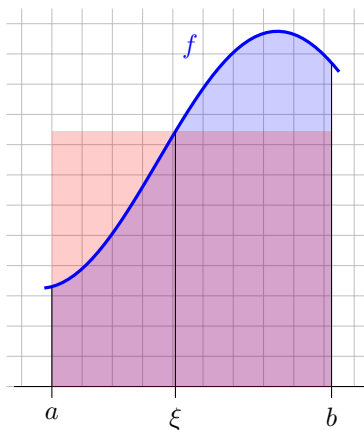


Abbildung 7.4. Veranschaulichung des Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Da f jeden Wert zwischen m und M annimmt (siehe Theorem 5.30), gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. $\square$

Die Aussage von Theorem 7.6 hat eine einfache geometrische Deutung (siehe Abbildung 7.4): Das Integral entspricht gerade der Fläche des Rechteckes von “mittlerer” Höhe.

Wir kommen langsam zur weitaus wichtigsten Eigenschaft der Integration, ihrem Zusammenhang zur Ableitung.

Definition 7.7 Sei $f \in C([a, b])$. Dann heisst $F \in C([a, b])$ eine **Stammfunktion von f** [une primitive de f] wenn F in $]a, b[$ differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x)$$

für jedes $x \in]a, b[$ gilt.

Zum Beispiel sind $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}x^2 + 1$ und $\frac{1}{2}x^2 + \pi$ Stammfunktionen von $f(x) = x$.

Theorem 7.8 Sei $f \in C([a, b])$. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f . Für jede weitere Stammfunktion G von f gilt, dass $F(x) - G(x)$ konstant für alle $x \in [a, b]$ ist.

Beweis. Sei $x_0 \in]a, b[$ fest gewählt. Dann existiert nach Theorem 7.6 für jedes $x \in]a, b[$ mit $x \neq x_0$ ein (von x abhängiger) Wert ξ_x zwischen x und x_0 so dass

$$f(\xi_x)(x - x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0),$$

wobei in der letzten Beziehung die Definition von F angewendet wurde. Dies ergibt

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi_x).$$

Beim Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ ergibt sich auf der linken Seite $F'(x_0)$ und auf der rechten Seite $f(x_0)$. Dies zeigt schon (fast) die erste Aussage des Theorems. Wir müssen nur noch zeigen, dass F rechtsseitig stetig in a und linksseitig stetig in b ist. Es folgt aber sofort aus der Definition des Integrals (oder dem Mittelwertsatz), dass

$$\lim_{x \rightarrow a+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \int_a^x f(t) \, dt = 0.$$

Analog zeigt man rechtsseitige Stetigkeit in b .

Die zweite Aussage folgt sofort aus Korollar 6.13. $\square$

Theorem 7.9 (Hauptsatz der Integralrechnung) [*Théorème fondamental du calcul intégral*] Sei F eine Stammfunktion von $f \in C([a, b])$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Nach Theorem 7.8 gibt es eine Konstante C mit $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + C$. Also folgt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) \, dt + C - \int_a^a f(t) \, dt - C = \int_a^b f(t) \, dt.$$

$\square$

Im Zusammenhang mit der Integralrechnung verwendet man statt $F(b) - F(a)$ auch oft die folgende bequemere Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b$$

Die Menge der Stammfunktionen (manchmal auch nur irgendeine Stammfunktion) bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** [*intégrale indéfinie*]. Man schreibt dies auch als $F = \int f(x) \, dx$ oder nur $F = \int f$.

7.4 Bestimmung von Stammfunktionen

Nach Definition 7.7 findet man eine Stammfunktion F gerade durch “Rückgängigmachen” der Ableitung. Hier hilft also ein gutes Gedächtnis und die Erlernung einiger Grundtechniken! Zum Glück kann man komplizierte Stammfunktionen auch mit Computeralgebra-Software bestimmen (Maple, Mathematica, ...). Trotzdem ist es unerlässlich, ein wenig Basiswissen in dieser Richtung zu erwerben.

7.4.1 Polynome und Potenzreihen

Eine Stammfunktion von x^α für $\alpha \neq -1$ ist $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$. Insbesondere ergibt sich für ein Polynom $f(x) = b_0 + b_1x + b_1x^2 + \cdots + b_nx^n$ die Stammfunktion

$$F(x) = b_0x + \frac{1}{2}b_1x^2 + \frac{1}{3}b_1x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}b_nx^{n+1}.$$

Dies lässt sich auf Potenzreihen erweitern.

Lemma 7.10 *Sei*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist für jedes x mit $|x - x_0| < r$ die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \quad (7.1)$$

konvergent. F ist Stammfunktion von f .

Im Prinzip könnte man mit Lemma 7.10 jede analytische Funktion behandeln, indem wir ihre Taylor-Reihe betrachten. Das Problem ist nur, am Ende von (7.1) wieder auf einen einfachen Ausdruck zu schliessen. Manchmal ist dies mit den üblichen Funktionen gar nicht möglich. Dann gibt man der Stammfunktion einfach einen neuen Namen und gelangt so trivialerweise zu einem einfachen Ausdruck.²

Beispiel 7.11 Zur Bestimmung der Stammfunktion von $f(x) = e^{-x^2}$ betrachten wir die Taylor-Reihe von e^y um 0:

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Diese Reihe lässt sich nicht mittels bekannter Funktionen in einer endlichen Formel ausdrücken. Um diesem Problem aus dem Weg zu gehen, wird die **Fehlerfunktion** [*fonction d'erreur*]

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$$

definiert. Diese spielt insbesondere in der Statistik eine wichtige Rolle. Es folgt

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

◇

²Dies erinnert an einen alten Witz: Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen in der Wüste? Er geht in die Wüste, baut einen Käfig, setzt sich rein und definiert: Ich bin aussen!

7.4.2 Partielle Integration

Aus der Formel für die Ableitung eines Produktes ergibt sich die Regel für die **partielle Integration** [*intégration par parties*]:

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx.$$

Für bestimmte Integrale folgt also

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.}$$

Das Ziel partieller Integration ist natürlich einen Ausdruck auf der rechten Seite zu erhalten, der einfacher als der Ausdruck auf der linken Seite ist. Die folgenden Beispiele illustrieren den Einsatz dieser Technik.

- Bei Integralen vom Typ

$$\int x^n e^{\lambda x} \, dx, \quad \int x^n \cos(\lambda x) \, dx, \quad \int x^n \sin(\lambda x) \, dx$$

lässt sich der Exponent n durch partielle Integration um eins verringern und schlussendlich auf 0 bringen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\lambda x} \, dx &= x^2 \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \int 2x \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} x^2 e^{\lambda x} - \frac{2}{\lambda} \left[x \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \int \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} x^2 e^{\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2} x e^{\lambda x} + \frac{2}{\lambda^3} e^{\lambda x} + \text{const.} \end{aligned}$$

- Die Berechnung einer Stammfunktion von $\log$ erfolgt mittels einer “produktiven Eins”:

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + \text{const.}$$

- Zur Berechnung von $\int e^x \cos x \, dx$ verwenden wir partielle Integration zwei Mal hintereinander:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x).$$

Bemerkung: Diese Beziehung ergibt sich übrigens einfacher, wenn man auf komplexe Zahlen wechselt.

Analog lassen sich allgemeinere Ausdrücke der Form

$$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$$

berechnen.

7.4.3 Substitutionsregel

Die **Substitutionsregel** [*changement de variable*] verwendet man bei Funktionen, die verdächtig danach “aussehen”, aus der Kettenregel hervorgegangen zu sein. Zum Beispiel ist die Funktion $g(x) = (\sin^3 x + e^{\sin x}) \cos x$ offensichtlich die Ableitung der Funktion $G(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + e^{\sin x}$.

Aus der Kettenregel folgen die Beziehungen

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int f(x) dx \quad (7.2)$$

mit der Substitution $x = \phi(t)$ für Stammfunktionen, sowie

$$\int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$$

für bestimmte Integrale.

Man kann sich (7.2) gut merken, indem man in Leibnizscher Notation die Beziehung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \phi(t) = \phi'(t)$$

verwendet.

Beispiel 7.12 Bei dem unbestimmten Integral

$$I = \int \frac{3t+2}{(3t^2+4t+2)^{5/2}} dt$$

substituieren wir

$$x := 3t^2 + 4t + 2, \quad dx = (6t + 4) dt$$

und erhalten

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^{5/2}} dx = \frac{1}{2} \frac{-2/3}{x^{3/2}} + \text{const.}$$

Zum Schluss drückt man die Stammfunktion wieder in der Originalvariablen x aus, man erhält also

$$I = -\frac{1}{3(3t^2+4t+2)^{3/2}} + \text{const.}$$

Bei bestimmten Integralen muss man noch auf die Transformation der Integrationsgrenzen aufpassen, zum Beispiel gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{3t+2}{(3t^2+4t+2)^{5/2}} dt = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{1}{x^{5/2}} dx = \left. \frac{1-2/3}{2 x^{3/2}} \right|_1^9 = \frac{26}{81}.$$

◇

Eigentlich verwendet man (7.2) üblicherweise gerade umgekehrt: $\int f(x) dx$ ist gegeben und dann sucht man eine Substitution $x = \phi(t)$, so dass der Integrand auf der linken Seite von (7.2) wesentlich einfacher wird.

Beispiel 7.13 Betrachte das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx.$$

Am meisten stört hier e^x ; wir nehmen also zunächst die Substitution $t := e^x$ vor. Es ist aber zu beachten, dass in (7.2) die Rücksubstitution $x = \log(t) =: \phi(t)$ verwendet werden muss. Es ergibt sich

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \phi'(t) dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{1}{t} dt.$$

Dieses Integral ist zwar einfacher, aber noch nicht einfach genug. Wir nehmen die weitere Substitution $u := \sqrt{1+t}$ mit der entsprechenden Rücksubstitution $t = u^2 - 1 =: \eta(u)$ vor und erhalten

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{u} \frac{1}{u^2-1} \eta'(u) du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \log |u-1| - \log |u+1| + \text{const} = \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \text{const}. \end{aligned}$$

Zum Schluss will man die Stammfunktion wieder in der Originalvariablen x ausdrücken und erhält nach Einsetzen von $u = \sqrt{1+t} = \sqrt{1+e^x}$

$$I = \log \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + \text{const}.$$

Bei der Berechnung des bestimmten Integrals muss wieder auf die entsprechende Anpassung der Integrationsgrenzen geachtet werden:

$$\int_0^{\log 3} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \log \frac{u-1}{u+1} \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \dots = \log \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \right).$$

◇

7.4.4 Rationale Funktion

Wir diskutieren im Folgenden die Integration von rationalen Funktionen $P(x)/Q(x)$ wobei P, Q einander teilerfremde Polynome sind. Für einfache rationale Funktionen lassen sich Stammfunktionen leicht angeben.

1. Funktionen der Form $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^k}$ haben die Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx = \begin{cases} \log|x-\alpha| & \text{wenn } k=1 \\ \frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k} & \text{wenn } k \neq 1 \end{cases} + \text{const.}$$

2. Funktionen der Form $x \mapsto \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}$ haben die Stammfunktionen:

$$\int \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \log((x-\beta)^2+\gamma^2) & \text{wenn } k=1 \\ \frac{1}{2} \frac{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{1-k}}{1-k} & \text{wenn } k \neq 1 \end{cases} + \text{const.}$$

3. Funktionen der Form $x \mapsto \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k}$ haben ebenfalls „elementare“ Stammfunktionen. Für $k=1$ haben wir:

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2} dx = \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{x-\beta}{\gamma} + \text{const.}$$

Für $k > 1$ erhalten wir eine Rekursionsformel, die genügend oft angewandt, zum Fall $k=1$ und somit zum $\arctan$ zurückführt: Zunächst sei $F_{k,\gamma}$ eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{(z^2+\gamma^2)^k}$. Insbesondere ist also

$$F_{1,\gamma}(z) = \frac{1}{\gamma} \arctan \frac{z}{\gamma}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned} F_{k,\gamma}(x-\beta) &= \int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^k} dx \\ &= \frac{1}{2(k-1)\gamma^2} \left(\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{k-1}} + (2k-3)F_{(k-1),\gamma}(x-\beta) \right) \end{aligned}$$

durch partielle Integration.

Diese Beispiele sind nicht zufällig gewählt, sondern betreffen die Terme, die bei einer sogenannten **Partialbruchzerlegung** [*décomposition en fractions partielles*] auftreten. Dabei gilt es, den Quotienten von zwei Polynomen in Teile zu zerlegen, so dass jeder Teil ein Polynom ist oder in der obigen Beispielliste vorkommt.

Theorem 7.14 Seien P und Q einander teilerfremde Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein Polynom S , paarweise verschiedene $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (die Nullstellen von Q) und positive natürliche Zahlen k_i , des weiteren $A_{i,r_i} \in \mathbb{R}$ für $r_i \leq k_i$ wobei $i = 1, \dots, n_1$, sowie paarweise verschiedene **quadratische** Polynome p_j und positive

natürliche Zahlen l_j , des weiteren $B_{j,s_j}, C_{j,s_j} \in \mathbb{R}$ und $s_j \leq l_j$, wobei $j = 1, \dots, n_2$, so dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{r_i=1}^{k_i} \frac{A_{i,r_i}}{(x - \alpha_i)^{r_i}} \right) \\ + \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s_j=1}^{l_j} \frac{B_{j,s_j} x + C_{j,s_j}}{p_j(x)^{s_j}} \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

wobei für jedes i, j die Polynome $(x - \alpha_i)^{k_i}$ und die Polynome $p_j(x)^{l_j}$ das Polynom Q teilen und die p_j keine Wurzel in $\mathbb{R}$ haben, genauer, es gibt $a \in \mathbb{R}$:

$$Q(x) = a \prod_{i=1}^{n_1} (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{n_2} p_j(x)^{l_j} \quad (7.4)$$

und

$$\deg(S) = \deg(P) - \deg(Q) \quad \text{oder} \quad S = 0,$$

wobei $\deg$ den Polynomgrad bezeichnet.

Der Beweis des Theorems läuft im wesentlichen über Polynomdivision; wir geben ihn hier aber nicht an. Stattdessen sollen einige Beispiele die Konstruktion der Partialbruchzerlegung illustrieren, siehe auch Kapitel 4 im Skript von Ch. Blatter für eine ausführlichere Darstellung.

Beispiel 7.15

1. Wir betrachten die Polynome

$$P(x) = 10x + 6 \quad \text{und} \quad Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

Da der Grad von P kleiner ist als der Grad von Q , wird $S = 0$. Ausserdem ist $Q(x) = (x - 3) \cdot (x + 1)$. Es ist also

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 0, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1, \quad k_1 = k_2 = 1$$

Wir müssen also A_1 und A_2 finden, so dass

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{x + 1} = \frac{A_1(x + 1)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} + \frac{A_2(x - 3)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \\ &= \frac{A_1(x + 1) + A_2(x - 3)}{(x - 3) \cdot (x + 1)} = \frac{(A_1 + A_2)x + A_1 - 3A_2}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich des Zählers erhalten wir $A_1 = 9$, $A_2 = 1$. Also erhalten wir

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 9 \log |x - 3| + \log |x + 1| + \text{const.}$$

2. Wir betrachten die Polynome

$$P(x) = x^3 + 3x \quad \text{und} \quad Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}$$

und damit wie oben

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= x + 2 + \frac{9}{x-3} + \frac{1}{x+1} \\ \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 9 \log|x-3| + \log|x+1| + \text{const.} \end{aligned}$$

3. Wir betrachten die Polynome

$$P(x) = 2x + 5 \quad \text{und} \quad Q(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$$

Wie oben ist $S = 0$. Hier ist

$$Q(x) = (x-3)(x+i)^2(x-i)^2 = (x-3)((x+i)(x-i))^2 = (x-3)(x^2+1)^2.$$

Es ist also

$$n_1 = n_2 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha = 3, \quad p_1(x) = p(x) = x^2 + 1, \quad k_1 = 1, \quad l_1 = 2$$

Wir suchen $A_1 = A$ und $B_{1,1} = B_1, C_{1,1} = C_1, B_{1,2} = B_2, C_{1,2} = C_2$, so dass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2}$$

gilt. Dazu bringen wir die rechte Seite zunächst auf den gemeinsamen Nenner $Q(x) = (x-3)(x^2+1)^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{A(x^2+1)^2 + (B_1x + C_1)(x-3)(x^2+1) + (B_2x + C_2)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)^2} \\ &= [(A+B_1)x^4 + (C_1-3B_1)x^3 + (2A+B_1-3C_1+B_2)x^2 + \dots \\ & \quad (-3B_1+C_1-3B_2+C_2)x + A-3C_1-3C_2] / [x(x-3)(x^2+1)^2]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck im Zähler soll mit $P(x) = 2x+5$ übereinstimmen. Koeffizientenvergleich ergibt 5 lineare Gleichungen in den 5 Unbekannten A, B_1, C_1, B_2, C_2 :

$$\begin{aligned} A + B_1 &= 0 \\ C_1 - 3B_1 &= 0 \\ 2A + B_1 - 3C_1 + B_2 &= 0 \\ -3B_1 + C_1 - 3B_2 + C_2 &= 2 \\ A - 3C_1 - 3C_2 &= 5 \end{aligned}$$

Auflösung dieses linearen Gleichungssystems (z.B. mit Gauss-Elimination, siehe Lineare Algebra) ergibt

$$A = \frac{11}{100}, \quad B_1 = -\frac{11}{100}, \quad C_1 = -\frac{33}{100}, \quad B_2 = -\frac{110}{100}, \quad C_2 = -\frac{130}{100}.$$

Also erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{100} \left(11 \frac{1}{x-3} - 11 \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{110x+130}{(x^2+1)^2} \right). \quad (7.5)$$

Die letzten beiden Terme müssen noch weiter zerlegt werden, um die Form erhalten, die auf Seite 100 diskutiert wird. Betrachte zunächst den vorletzten Term in (7.5):

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 3F_{1,1}(x) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 3 \arctan(x) + \text{const}, \end{aligned}$$

Betrachte jetzt den letzten Term in (7.5):

$$\begin{aligned} \int \frac{110x+130}{(x^2+1)^2} dx &= 110 \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx + 130 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{110}{2} \frac{1}{x^2+1} - 130F_{2,1}(x) + \text{const} \\ &= \frac{110}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{130}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x) \right) + \text{const}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Definitionen von $F_{1,1}(x)$ und $F_{2,1}(x)$ von Seite 100 benutzt. Alles zusammengekommen ergibt sich letztendlich

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x+5}{x^5-3x^4+2x^3-6x^2+x-3} dx \\ &= \frac{1}{200} \left(\frac{-130x+110}{x^2+1} - 196 \arctan(x) - 11 \log(x^2+1) + 11 \log|x-3| \right) + \text{const}. \end{aligned}$$

◇

7.5 Anwendungen der Integralrechnung

Im folgenden behandeln wir zwei kleine Anwendungen von bestimmten Integralen.

Berechnung eines Rotationskörpers. Rotiert man die durch eine Funktion $z \mapsto f(z)$ beschriebene Kurve γ um die z -Achse, so ergibt sich ein Rotationskörper, siehe

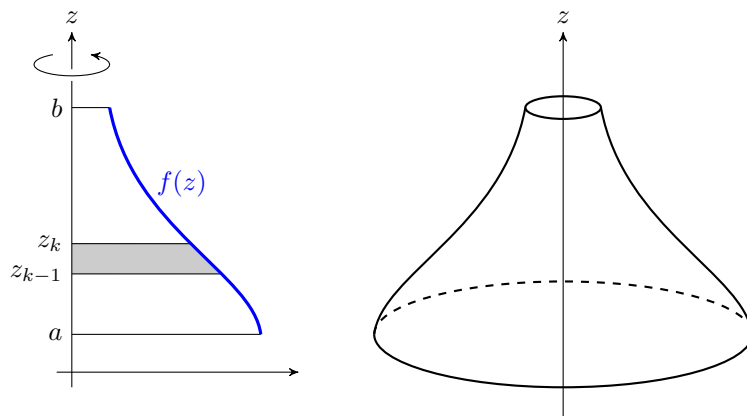
Abbildung 7.5. Durch eine Funktion f erzeugter Rotationskörper.

Abbildung 7.5. Wir wollen nun das Volumen V dieses Rotationskörpers berechnen. Dazu partitionieren wir das Intervall $[a, b]$ mittels

$$\sigma = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}, \quad z_j = a + jh,$$

in Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$. Dadurch wird das Volumen in n Scheiben der Höhe h aufgeteilt. Jeder dieser Scheiben lässt sich gut durch einen (flachen) Zylinder mit Volumen $\pi f(z_j)^2 h$ approximieren. Als Approximation für das Gesamtvolumen erhält man

$$V \approx \sum_{j=1}^n \pi f(z_j)^2 h.$$

Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ergibt

$$V = \pi \int_a^b f(z)^2 dz. \quad (7.6)$$

Beispiel 7.16 Ein Kugel mit Radius $r > 0$ wird erzeugt indem einen Halbkreis vom Radius $r > 0$ um die z -Achse rotiert. Der Halbkreis lässt sich mittels der Funktion $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$ für $z \in [-r, r]$ beschreiben. Aus (7.6) folgt nun die wohlbekannte Formel für das Volumen der Kugel:

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz = 2\pi \int_0^r (r^2 - z^2) dz = 2\pi \left(zr^2 - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

◇

Berechnung der Länge einer Kurve. Eine Kurve γ in der Ebene kann mittels zweier Funktionen für die x - und y -Koordinaten der Punkte auf der Kurve beschrieben

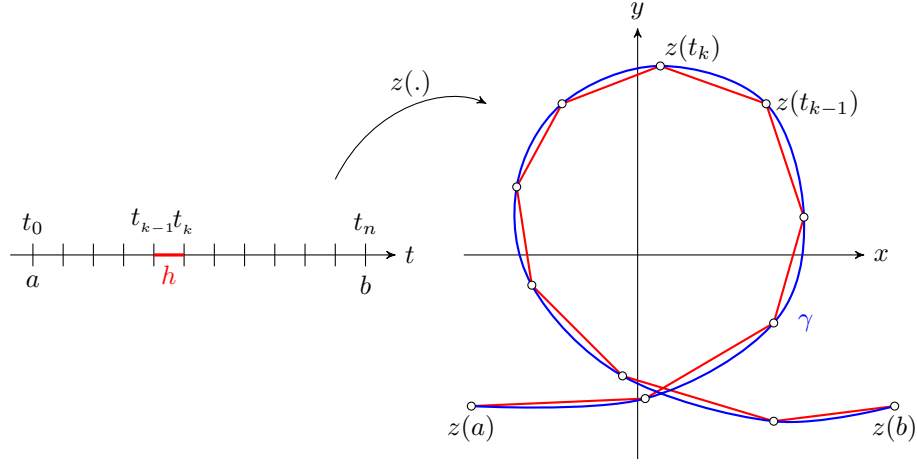


Abbildung 7.6. Diskretisierung einer Kurve durch Polygonzug.

werden:

$$\gamma : t \mapsto z(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Wir nehmen an, dass $x(t), y(t)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar sind. Um die Länge der Kurve zu berechnen, gehen wir wie in Abbildung 7.6 vor. Wir partitionieren wieder das Intervall $[a, b]$ mittels

$$\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}, \quad t_j = a + jh,$$

in Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$. Die entsprechenden Punkte $z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)$ auf der Kurve werden durch einen Polygonzug verbunden. Wir betrachten nun die Länge einer einzelnen Teilstrecke von $z(t_{k-1})$ nach $z(t_k)$:

$$\ell_k = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}. \quad (7.7)$$

Wir setzen jetzt voraus, dass $x(t)$ stetig differenzierbar ist und betrachten die Taylor-Entwicklung an der Stelle t_k :

$$x(t) = x(t_k) + (t - t_k)x'(t_k) + o(t - t_k).$$

Einsetzen von $t = t_{k-1}$ liefert also

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k)h + o(h), \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k)h + o(h),$$

wobei die Formel für y analog hergeleitet wird. Die Länge des gesamten Polygonzugs ergibt sich aus der Summe der einzelnen Teilstreckenlängen:

$$\begin{aligned}\ell_\sigma &= \sum_{j=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &= \sum_{j=1}^n \sqrt{(x'(t_k)h + o(h))^2 + (y'(t_k)h + o(h))^2} \\ &= \sum_{j=1}^n h \sqrt{(x'(t_k) + o(1))^2 + (y'(t_k) + o(1))^2} \\ &= \sum_{j=1}^n h \sqrt{x'(t_k)^2 + y'(t_k)^2 + o(1)}.\end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ (also auch $n \rightarrow \infty$) ergibt sich die folgende Beziehung für die Länge ℓ der durch γ beschriebenen Kurve:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (7.8)$$

Beispiel 7.17 Ein Kreis mit Radius $r > 0$ lässt sich durch die Parametrisierung $z(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ beschreiben werden. Aus (7.8) ergibt sich die wohlbekannte Formel für den Kreisumfang:

$$\int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

◇

7.6 Weitergehende Rechenregeln und Eigenschaften

In diesem Abschnitt behandeln wir weitere wichtige Eigenschaften (Integralrechnung für Fortgeschrittene) von Integralen.

Ableitung bei variablen Integrationsgrenzen. Für die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ gilt $F'(x) = f(x)$. Das folgende Theorem behandelt den allgemeineren Fall, dass die Integrationsgrenzen differenzierbare Funktionen von x sind.

Theorem 7.18 Sei $f \in C([a, b])$, I ein offenes Intervall und seien $l, u : I \rightarrow [a, b]$ differenzierbar. Dann ist die Funktion

$$G(x) := \int_{l(x)}^{u(x)} f(t) dt$$

in I differenzierbar und es gilt

$$G'(x) = u'(x)f(u(x)) - l'(x)f(l(x)).$$

Beweis. Für eine Stammfunktion F von f gilt $G(x) = F(u(x)) - F(l(x))$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$G' = u'(x)F'(u(x)) - l'(x)F'(l(x)) = u'(x)f(u(x)) - l'(x)f(l(x)).$$

□

Als einfaches Beispiel für die Anwendung von Theorem 7.18 betrachten wir die Ableitung von

$$G(x) = \int_0^{x^2} e^t \, dt \quad \Rightarrow \quad G'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Wichtige Ungleichungen bei Integralen. Aus der Definition des bestimmten Integrals folgt für zwei Funktionen $f, g \in C([a, b])$:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx. \quad (7.9)$$

Desweiteren kann man sich an einem Bild leicht verdeutlichen, dass der Absolutbetrag des Flächeninhalts einer Funktion nicht kleiner werden kann, wenn f durch $|f|$ ersetzt wird. Oder in Formeln:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Die folgende Ungleichung ist wesentlich tiefschürfender und ein wichtiges Werkzeug in der höheren Analysis.

Theorem 7.19 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) [*Inégalité de Cauchy-Schwarz*] Seien $f, g \in C([a, b])$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) \, dx \right)^{1/2}.$$

Beweis. Für $f \equiv 0$ ist die Ungleichung offenbar erfüllt. Sei nun also f nicht identisch Null auf $[a, b]$. Insbesondere ist dann $\int_a^b f^2(x) \, dx > 0$, siehe Bemerkung 7.5. Setze

nun $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f^2(x) dx}$. Dann ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (-\lambda f(x) + g(x))^2 dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \\ &= -\frac{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2}{\int_a^b f^2(x) dx} + \int_a^b g^2(x) dx \end{aligned}$$

nach Multiplikation mit $\int_a^b f^2(x) dx > 0$ die Behauptung:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

□

7.7 Uneigentliche Integrale

Ist das Integrationsintervall unendlich oder hat die Funktion Singularitäten, so kann die Definition des bestimmten Integrals über Unter- und Obersummen nicht verwandt werden. Trotzdem kann man oft auch solchen **uneigentlichen Integralen** [*intégrales généralisées*] einen vernünftigen Wert mittels eines Grenzwertprozesses zuweisen.

7.7.1 Funktionen mit Singularitäten

Wir betrachten zunächst eine stetige Funktion $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, die bei b eine Singularität aufweist, also nicht in b stetig fortgesetzt werden kann. Für jedes $x \in [a, b[$ existiert dann das bestimmte Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Existiert auch der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$, so sagen wir, dass $\int_a^{b-} f(x) dx$ existiert³ (oder auch: konvergiert), und schreiben

$$\int_a^{b-} f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$$

Ansonsten sagen wir, dass $\int_a^{b-} f(x) dx$ divergiert.

³Meist schreibt man einfach $\int_a^b f(x) dx$ statt $\int_a^{b-} f(x) dx$.

Bemerkung 7.20 Analog verfährt man mit einer stetigen Funktion $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die bei a eine Singularität aufweist. Man definiert $G(x) = \int_x^b f(t) dt$ und schreibt (bei Konvergenz)

$$\int_{a+}^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow a+} G(x)$$

Liegen Singularitäten an beiden Intervallenden vor, so trennt man das Integral an einer beliebigen Stelle $c \in]a, b[$ auf:

$$\int_{a+}^{b-} f(x) dx = \int_{a+}^c f(x) dx + \int_c^{b-} f(x) dx.$$

Das Integral existiert dann, wenn beide Integrale auf der rechten Seite existieren. Der daraus erhaltene Wert ist unabhängig von der Wahl von c .

Beispiel 7.21 Wir betrachten das Integral $\int_{(-1)+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ mit Singularitäten an beiden Intervallenden und trennen es bei $c = 0$. Für $0 < x < 1$ gilt

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(t) \Big|_0^x \xrightarrow{x \rightarrow 1} = \frac{1}{2}\pi.$$

Für $-1 < x < 0$ gilt

$$F(x) = \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(t) \Big|_x^0 \xrightarrow{x \rightarrow -1} = \frac{1}{2}\pi.$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\int_{(-1)+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi.$$

◇

Ist man in der komfortablen Lage, eine Stammfunktion zur Hand zu haben, so ist es sicher am einfachsten wie in Beispiel 7.21 vorzugehen. Ansonsten kann man eines der folgenden Kriterien verwenden. Diese sind für eine Funktion mit Singularität in b formuliert; analoge Kriterien gelten natürlich für eine Funktion mit Singularität in a .

Theorem 7.22 Sei $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\int_a^{b-} f(x) dx$ wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

- (a) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist gleichmässig stetig auf $[a, b[$.
- (b) f ist beschränkt auf $[a, b[$.
- (c) $\int_a^{b-} |f(x)| dx$ existiert. (Dann spricht man – wie bei Reihen – von absoluter Konvergenz des Integrals.)

- (d) Es gibt eine stetige Funktion $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq f(t) \leq g(t)$ für alle $t \in [a, b[$, so dass $\int_a^{b-} g(t) dt$ existiert.
- (e) Es gibt ein $\alpha < 1$ so dass

$$\lim_{x \rightarrow b-} (b-x)^\alpha \cdot f(x) = 0.$$

Einige Bemerkungen und Beispiele zu Theorem 7.22:

- Kriterium (a) ist primär von theoretischem Nutzen, da die gleichmässige Stetigkeit von $F(x)$ oft nur unter Kenntnis von $F(x)$ geprüft werden kann. Kennt man aber $F(x)$, so ist es viel einfacher den Grenzwertprozess direkt vorzunehmen als die gleichmässige Stetigkeit zu überprüfen.
- Kriterium (b) folgt aus (a). Zum Beispiel ist $\cos(1/x)$ beschränkt auf $]0, 1]$ und damit existiert

$$\int_{0+}^1 \cos(1/x) dx.$$

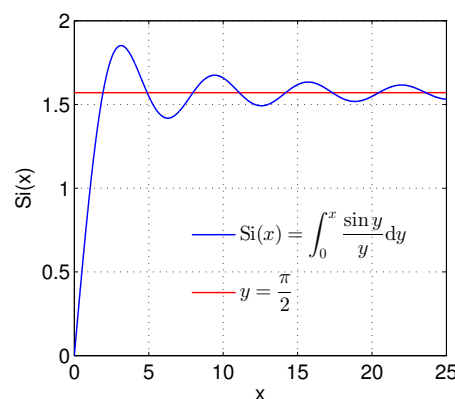
Für die Stammfunktion von $\cos(1/x)$ folgt nach Substitution $y = 1/x$ und partieller Integration die Beziehung

$$\int \cos(1/x) dx = - \int \frac{\cos y}{y^2} dy = \frac{\cos y}{y} + \int \frac{\sin y}{y} dy.$$

Beim zweiten Term kommt man nicht so richtig weiter; deswegen der übliche “Mathematikertrick”: Wir definieren eine neue Funktion

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy,$$

den sogenannten **Integralsinus** [*sinus intégral*]. Diese Funktion sieht wie folgt aus:



Man kann zeigen, dass $\text{Si}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ gilt. Wir erhalten also die Stammfunktion

$$\cos(1/x)x + \text{Si}(1/x)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{0+}^1 \cos(1/x) \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \cos(1/x) \, dx \\ &= \cos(1) + \text{Si}(1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\cos(1/\varepsilon)\varepsilon + \text{Si}(1/\varepsilon)) \\ &= \cos(1) + \text{Si}(1) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Ähnlich wie bei Reihen folgt aus Konvergenz nicht zwingend absolute Konvergenz, siehe (c).
- Als Beispiel für die Anwendung von (c) und (d) betrachten wir

$$\int_{0+}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} \, dx. \quad (7.10)$$

Wegen $|\sin x| \leq |x|$ gilt für den Integranden $|\frac{\sin x}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$. Da $\int_{0+}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}$, folgt aus (d) absolute Konvergenz für (7.10) und damit aus (c) auch Konvergenz.

- Kriterium (e) zeigt für (7.10) ebenfalls Konvergenz, da für $1/2 < \alpha < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\sin x}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{3/2-\alpha}} \\ &= \frac{1}{3/2-\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{1/2-\alpha}} = 0. \end{aligned}$$

- Kriterium (e) zieht sogar absolute Konvergenz nach sich. In Umkehrung von (e) gilt, dass aus

$$\lim_{x \rightarrow b-} (b-x)^\alpha \cdot |f(x)| > 0.$$

für ein $\alpha \geq 0$ folgt, dass $\int_a^{b-} f(x) \, dx$ *nicht absolut konvergent* ist. Für den Spezialfall, dass $f(x)$ das gleiche Vorzeichen auf dem Intervall $[a, b]$ hat, folgt dass $\int_a^{b-} f(x) \, dx$ divergiert.

7.7.2 Unendliches Integrationsintervall

Die Definitionen und Kriterien von Abschnitt 7.7.1 lassen sich für Integrale auf unendlichen Integrationsintervallen ($[a, \infty[$, $] - \infty, b]$ und $] - \infty, \infty[$) entsprechend anpassen. Zum Beispiel definiert man für den Fall einer auf $[a, \infty[$ stetigen Funktion f die Hilfsfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, und schreibt (bei Konvergenz)

$$\boxed{\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x).}$$

Die entsprechende Variante von Theorem 7.22 lautet wie folgt.

Theorem 7.23 *Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\int_a^\infty f(x) dx$ wenn eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:*

- (a) $\int_a^\infty |f(x)| dx$ existiert. (Dann spricht man von absoluter Konvergenz des Integrals.)
- (b) Es gibt eine stetige Funktion $g : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq f(t) \leq g(t)$ für alle $t \geq a$, so dass $\int_a^\infty g(t) dt$ existiert.
- (c) Es gibt ein $\alpha > 1$ so dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot f(x) = 0.$$

Im Gegensatz zu Theorem 7.22 (b) hat Beschränktheit auf einem unendlichen Intervall wenig mit der Existenz des Integrals $\int_a^\infty f(x) dx$ zu tun. Auf der einen Seite impliziert Beschränktheit nicht zwingend die Existenz des Integrals, wie man sich leicht an Hand von $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ überzeugen kann. Auf der anderen Seite kann man unbeschränkte Funktionen f konstruieren, für die $\int_a^\infty f(x) dx$ trotzdem existiert.

Bemerkung 7.24 Ähnlich wie bei Theorem 7.22 (e) lässt sich auch die Aussage von Theorem 7.23 umkehren. Gibt es ein $\alpha \leq 1$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot |f(x)| > 0,$$

dann ist $\int_a^\infty f(x) dx$ nicht absolut konvergent. Für den Spezialfall, dass $f(x)$ das gleiche Vorzeichen auf dem Intervall $[a, \infty]$ hat, folgt dass $\int_a^\infty f(x) dx$ divergiert.

Zum Abschluss geben wir noch das **Integralkriterium für Reihen** [Comparison série-intégrale] an. Sei $f : [p, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend. Dann gilt $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ für $x \in [n, n+1]$. Nach (7.9) folgt dann

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Durch Aufsummieren erhält man also

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} f(k) \leq \int_p^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{\infty} f(k).$$

Daraus folgt ebenfalls

$$\int_p^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=p}^{\infty} f(k) \leq f(p) + \int_p^{\infty} f(x) dx.$$

Also gilt folgende Aussage.

Lemma 7.25 *Sei $f : [p, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und monoton (fallend oder steigend). Dann konvergiert $\sum_{k=p}^{\infty} f(k)$ genau dann wenn $\int_p^{\infty} f(x) dx$ existiert.*

Zum Beispiel sieht man mittels Lemma 7.25 leicht, dass $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert, da $\int_1^{\infty} 1/x^2 dx$ existiert.

7.8 Überblick von Ableitungen und Stammfunktionen

$f(x)$	Ableitung von f	Stammfunktion von f	Bedingung
a	0	ax	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1, x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\log x $	$x \neq 0$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{-2x}{(a^2+x^2)^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{2x}{(a^2-x^2)^2}$	$\frac{1}{2a} \log \left \frac{a+x}{a-x} \right $	$a \neq 0, x \neq \pm a$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} \log \left \frac{x-a}{x+a} \right $	$a \neq 0, x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log x + \sqrt{x^2-a^2} $	$a \neq 0, x > a $
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$	$a > 0, x < a $
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$	$\log(x + \sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$	$\log x + \sqrt{x^2-a^2} $	$a \neq 0, x > a $
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$	$a > 0, x < a $
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x \log a$	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x \log x - x$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$-\log \cos x $	$x \neq \pi/2 + k\pi$
$\cotan x$	$-(1 + \cotan^2 x)$	$\log \sin x $	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\log \left \tan \frac{x}{2} \right $	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\log \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f(x)$	Ableitung von f	Stammfunktion von f	Bedingung
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$ x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{arccotan} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \operatorname{arccotan} x + \log \sqrt{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	$\log \cosh x$	
$\operatorname{cotanh} x$	$1 - \operatorname{cotanh}^2 x$	$\log \sinh x $	$x \neq 0$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{arctanh} x + \log \sqrt{1-x^2}$	$ x < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \operatorname{arcoth} x + \log \sqrt{x^2-1}$	$ x > 1$