

Kapitel 6

Ableitung einer Funktion

Definition 6.1 Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$ definiert. Dann ist f **differenzierbar an der Stelle x_0** [f est dérivable en x_0] wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert wird **Ableitung von f in x_0** [dérivée de f au point x_0] genannt, und wir schreiben

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Alternativ kann man die Ableitung durch Einführung der Variable $h := x - x_0$ auch wie folgt definieren:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Diese Form eignet sich oft besser zum Berechnen.

Wenn $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in E$ ist, so können wir die Funktion

$$r(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

definieren. Für $x \neq x_0$ ergibt sich

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

oder, in Worten, $r(x)$ konvergiert für $x \rightarrow x_0$ schneller als $x - x_0$ gegen 0. Die Funktion $r(x)$ hat eine konkrete Interpretation: Sie ist der Fehler, den man macht,

wenn man in der Nähe von x_0 die Funktion f durch die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x). \quad (6.1)$$

Man sieht sofort, dass f an der Stelle x_0 stetig sein muss. **Aus Differenzierbarkeit folgt also immer Stetigkeit.**

Die Existenz einer Funktion r mit obigen Eigenschaften ist äquivalent zur Differenzierbarkeit.

Theorem 6.2 *Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$ definiert. Dann ist f differenzierbar an der Stelle x_0 genau dann wenn es eine Funktion $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt so dass*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$$

und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gelten. In diesem Fall ist $a = f'(x_0)$.

Beweis. Eine Richtung wurde bereits oben nachgewiesen. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass es eine Funktion r mit den genannten Eigenschaften gibt. Dann folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{r(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a.$$

□

Bemerkung: Im Buch von Douchet/Zwahlen wird sprachlich zwischen Definition 6.1 [f est dérivable en x_0] und der äquivalenten Charakterisierung mittels der Existenz von $r(x)$ [f est différentiable en x_0] sprachlich unterschieden. Dies ist eher ungewöhnlich.

6.1 Beispiele und Rechenregeln

Wir geben zunächst einige einfache Beispiele an.

- $f(x) = x^n$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.
Nachweis: Nach der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (x_0 + h)^n - x_0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n \\ &= nx_0^{n-1}h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k. \end{aligned}$$

Da im zweiten Term nur Potenzen h^k mit $k \geq 2$ auftauchen, gilt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = nx_0^{n-1}.$$

- $f(x) = e^x$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = e^{x_0}$. Die Ableitung von der Exponentialfunktion ist also wieder die Exponentialfunktion.
Nachweis: Aus $e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$ folgt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = e^{x_0}(e^h - 1) = e^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = e^{x_0}h + e^{x_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}.$$

Wieder tauchen im zweiten Term nur Potenzen h^k mit $k \geq 2$ auf; also folgt
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = e^{x_0}.$

- $f(x) = \sin x$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \cos x_0$.
Nachweis: Mit Hilfe der Rechenregeln für Sinus und Cosinus ergibt sich

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \cos(x_0 + h/2) \cdot \sin(h/2). \quad (6.2)$$

Wir müssen jetzt noch ausnutzen, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ gilt. Diese Beziehung erhält man aus der Definition des Sinus als Potenzreihe (siehe Abschnitt 4.4):

$$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^{2m+1}}{(2m+1)!} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^{2m}}{(2m+1)!} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

Es ergibt sich also aus (6.2), dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x_0.$$

- Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist *nicht* in $x_0 = 0$ differenzierbar, da für $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ nicht existiert.

Das folgende Theorem enthält (fast) alle wichtigen Rechenregeln mit Ableitungen.

Theorem 6.3 Seien $f, g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in E$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(b) Produktregel: $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(c) Quotientenregel: Wenn $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(d) Kettenregel: Sei nun $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(E) \subset G$, in der Umgebung von $f(x_0)$ definiert. Wenn g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Wir beweisen nur (b) und (d).

Zu (b): Aus

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0 + h) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0)) \end{aligned}$$

folgt sofort

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Zu (d): Setze $y_0 := f(x_0)$. Aus den Beziehungen

$$f(x_0 + h) = y_0 + f'(x_0)h + r(x_0 + h), \quad g(y_0 + h) = g(y_0) + g'(y_0)h + q(y_0 + h),$$

mit $r(x_0 + h)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und $q(y_0 + h)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, folgt

$$g(f(x_0 + h)) = g(y_0 + \underbrace{f'(x_0)h + r(x)}_{=: \tilde{h}}) = g(y_0) + g'(y_0)\tilde{h} + q(y_0 + \tilde{h}).$$

Da $\tilde{h}/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)$, ergibt sich daraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(y_0)f'(x_0),$$

wobei zusätzlich noch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot \frac{\tilde{h}}{h} = \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot f'(x_0) = 0$$

ausgenutzt wurde. $\square$

Im Folgenden werden wir uns ein wenig entspannen und nicht mehr zwischen x und x_0 unterscheiden, wenn es nicht unbedingt notwendig ist.

Bemerkung 6.4 Wer sich die Quotientenregel schlecht merken kann, merkt sich einfach nur der Beziehung $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ und macht den Rest mit der Produktregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

$\diamond$

Mit den Regeln von Theorem 6.3 lassen sich jetzt bequem Ableitungen für weitere Funktionen finden.

- Für $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $x \neq 0$ folgt aus der Quotientenregel

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

- Da $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, erhalten wir aus der Kettenregel mit $g(y) = \sin(y)$ und $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$:

$$\cos' x = g'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

- Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ergibt sich die Ableitung von $\tan x$ aus

$$\tan' x = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Das folgende Resultat ist vielleicht etwas überraschend: Man kann die Ableitung der Umkehrfunktion sehr einfach aus der Ableitung der Originalfunktion bestimmen.

Theorem 6.5 Sei $f : I \rightarrow F$ bijektiv für ein ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Weiterhin sei f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : F \rightarrow I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Ableitung der Beziehung $y = (f \circ f^{-1})(y)$ führt mit der Kettenregel auf

$$1 = (f \circ f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0).$$

Division durch $f'(f^{-1}(y_0))$ liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Zwei wichtige Beispiele für die Anwendung von Theorem 6.5.

- Wie betrachten $\arctan(y)$, die Umkehrfunktion vom $\tan x$:

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2},$$

wobei wir im letzten Schritt die Beziehung $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ ausgenutzt haben.

- Der Ableitung des Logarithmus $\log : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist

$$\log' y = \frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

Zum Abschluss dieses grundlegenden Abschnitts noch die Erweiterung von einseitigen Grenzwerten (siehe Abschnitt 5.6.1) auf Ableitungen.

Definition 6.6 Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in E$.

- Falls f rechts von x_0 definiert ist, dann heisst f **rechtsseitig differenzierbar** [dérivable à droite] in x_0 wenn der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst **rechtsseitige Ableitung** [dérivée à droite] und wird mit $f'_d(x_0)$ bezeichnet.

- Falls f links von x_0 definiert ist, dann heisst f **linksseitig differenzierbar** [dérivable à gauche] in x_0 wenn der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst **linksseitige Ableitung** [dérivée à gauche] und wird mit $f'_g(x_0)$ bezeichnet.

Aus Theorem 5.24 folgt sofort, dass eine in der Umgebung von x_0 definierte Funktion genau dann in x_0 differenzierbar ist wenn sie links- und rechtsseitig differenzierbar ist und $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dies erleichtert die Untersuchung von stückweise definierten Funktionen erheblich. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x < a \\ f_2(x) & \text{für } x \geq a, \end{cases}$$

für zwei in a differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Um nachzuweisen, dass f in $x_0 = a$ differenzierbar ist, geht man wie folgt vor:

1. Nachweis, dass f in $x_0 = a$ stetig ist, dass heisst Nachweis von $\lim_{x \rightarrow a^-} f_1(x) = f_2(a)$.
2. Nachweis, dass $f'_1(a) = f'_2(a)$.

Da die links- bzw. rechtsseitige Ableitung von f in a durch $f'_1(a)$ bzw. $f'_2(a)$ gegeben ist, folgt damit, dass f in differenzierbar ist.

6.2 Exkurs in die O -Notation

Die Landauschen Symbole [notations de Landau] o und O erlauben es, Approximationen wie die lineare Approximation (6.1) besonders kompakt auszudrücken, wenn die genaue Form des Fehlerterms r nicht von Interesse ist. Man muss sich allerdings ein wenig an die Schreibweise gewöhnen.

Wenn für eine gegebene Funktion r der Quotient $\frac{r(h)}{h}$ mit $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht, sagt man $r(h)$ sei “klein oh” von h und schreibt

$$r(h) = o(h). \quad (\text{für } h \rightarrow 0)$$

Man beachte, dass $o(h)$ hier *nicht* als Funktionswert zu verstehen ist, sondern nur als Aussage über das Verhalten der Funktion r in der Nähe von 0. Jetzt kann man zum Beispiel statt (6.1) schreiben

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad (h \rightarrow 0) \quad (6.3)$$

und meint damit, dass es irgendeine (nicht näher bekannte) Funktion r mit $r(h) = o(h)$ gibt, so dass $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$.

Obige Definition kann von $o(h)$ auf $o(q(h))$ für eine beliebige Funktion q (meist $q(h) = h^k$) und auf beliebige Grenzübergänge $x \rightarrow \xi$ verallgemeinert werden:

$$r(x) = o(q(x)), \quad (\text{für } x \rightarrow \xi)$$

schreibt man, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0$$

gilt. Einige Beispiele:

- $3h^{n+1} + h^n = o(h^k)$ für $h \rightarrow 0$ wenn $k \leq n - 1$;
- $\frac{\sin h}{h} - 1 = o(h)$ für $h \rightarrow 0$;
- $\frac{1}{t} = o(1)$ für $t \rightarrow \infty$;
- $t^{1000} = o(e^t)$ für $t \rightarrow \infty$.

Wenn für eine gegebene Funktion R der Quotient $\frac{R(x)}{q(x)}$ für $x \rightarrow \xi$ beschränkt bleibt, schreibt man

$$R(x) = O(q(x)), \quad (\text{für } x \rightarrow \xi).$$

Offenbar folgt aus $R(x) = o(q(x))$ immer $R(x) = O(q(x))$. Diese “gross Oh”-Notation erlaubt es mitunter das Grenzverhalten feiner zu beschreiben. Zum Beispiel werden wir sehen, dass für eine zwei Mal differenzierbare Funktion statt (6.3) auch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

geschrieben werden kann. Einige weitere Beispiele:

- $3h^{n+1} + 3h^n = O(h^k)$ für $h \rightarrow 0$ wenn $k \leq n$;
- $\frac{\sin h}{h} - 1 = O(h^2)$ für $h \rightarrow 0$;
- $4t^{100} + 3t^{50} = O(t^{100})$ für $t \rightarrow \infty$.

6.3 Lokale Extrema

Aus Korollar 5.31 wissen wir bereits, dass eine stetige Funktion $f \in C([a, b])$ immer ihr Minimum und Maximum auf dem Intervall $[a, b]$ annimmt. Diese bezeichnet man auch als *globales* Minimum und *globales* Maximum, um sie von den in diesem Abschnitt behandelten lokalen Minimum/Maximum zu unterscheiden.

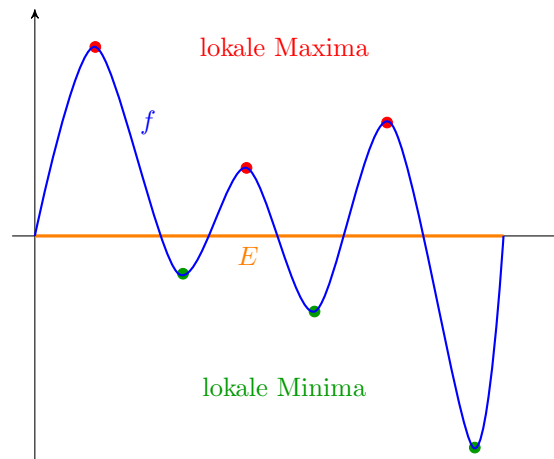
Definition 6.7 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in E$ definiert. f hat ein **lokales Maximum** [maximum local] in x_0 , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f hat ein **lokales Minimum** [minimum local] in x_0 , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Im Gegensatz zum (globalen) Maximum darf f weiter weg von einem lokalen Maximum x_0 auch grössere Werte annehmen. Lokale Minima und lokale Maxima nennt man auch **lokale Extrema** [extrema locaux].



Graph einer Funktion mit mehreren lokalen Extrema.

Theorem 6.8 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in E$ differenzierbar. Hat f ein lokales Extremum in x_0 , so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Angenommen, f habe ein lokales Maximum in x_0 . Dann gelten

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

sowie

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

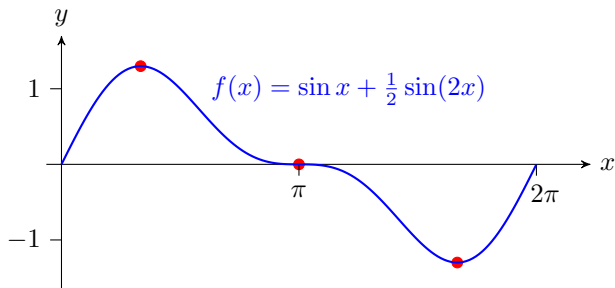
Also folgt $f'(x_0) = 0$. Für ein lokales Minimum erfolgt der Beweis analog, mit umgekehrten Vorzeichen. $\square$

Einen Punkt $x_0 \in E$ mit $f'(x_0) = 0$ nennt man einen **kritischen Punkt** [*point critique*] (oder auch: **stationären Punkt** [*point stationnaire*]) von f . Nicht alle kritischen Punkte sind lokale Maxima oder Minima.

Beispiel 6.9 Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Am Graph sieht man leicht, dass diese Funktion drei kritische Punkte hat:



Aus der Ableitung

$$f'(x) = \cos x + \cos(2x) = \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

ergeben sich im Intervall $[0, 2\pi]$ die drei kritischen Punkte

$$\frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3},$$

von denen aber nur zwei Punkte auch lokale Extrema sind. $\diamond$

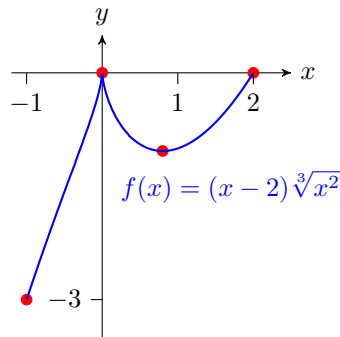
Um das (globale) Maximum oder Minimum einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, müssen wir unter den folgenden Kandidaten suchen:

- Punkte am Rand: a, b ;
- Punkte, an denen f nicht differenzierbar ist;

- kritische Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$.

Beispiel 6.10 Sei $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}.$$



Wir suchen die Punkte, wo f sein globales Minimum und sein globales Maximum annimmt. Bei der Ableitung muss man ein wenig für $x < 0$ aufpassen und dies mittels einer Fallunterscheidung behandeln. Man erhält:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ \frac{5x-4}{-3\sqrt[3]{-x}}, & x < 0. \end{cases}$$

Es ist klar, dass f in 0 nicht differenzierbar ist und dass der einzige kritische Punkt $x_0 = \frac{4}{5}$ ist. Die Randpunkte des Intervalls liefern noch die Kandidaten -1 und 2 . Nun gilt

$$f(-1) = -3, \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}, \quad f(2) = 0.$$

Also wird das Minimum -3 im Punkt $x = -1$, und das Maximum 0 in den Punkten $x = 0$ und $x = 2$ angenommen. Der kritische Punkt liefert weder Maximum noch Minimum (nur ein lokales Minimum). $\diamond$

6.4 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (Theorem 5.32) folgt nun der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen in verschiedenen Variationen.

Theorem 6.11 (Satz von Rolle [théorème de Rolle]) Sei $f \in C([a, b])$, mit $a < b$, eine in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

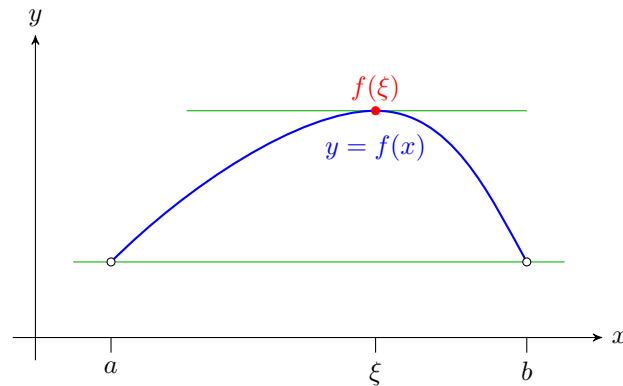


Abbildung 6.1. Illustration des Satzes von Rolle.

Beweis. Da f stetig ist, gilt $f([a, b]) = [m, M]$. Wenn die einzigen Punkte, wo f die Werte m und M annimmt, a und b sind, so ist $m = M$ und f ist konstant. In diesem Fall gilt $f'(\xi) = 0$ für jedes $\xi \in]a, b[$. Wenn nicht, so findet man $\xi \in]a, b[$ so dass $f(\xi) = m$ oder $f(\xi) = M$. An einer derartigen Stelle gilt aber $f'(\xi) = 0$, siehe Theorem 6.8. $\square$

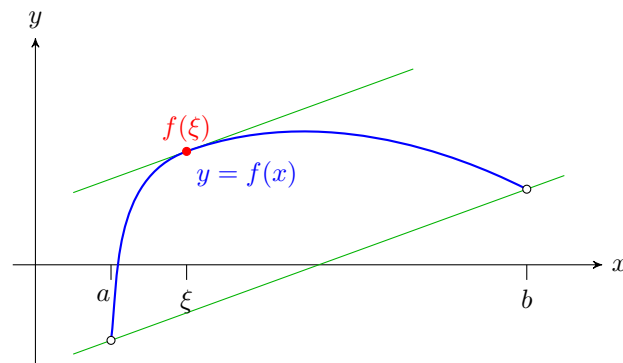


Abbildung 6.2. Illustration des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Theorem 6.12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) [*Théorème des accroissements finis*] Sei $f \in C([a, b])$, mit $a < b$, eine in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ so dass

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a). \quad (6.4)$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen des Satzes von Rolle, Theorem 6.11. Ausserdem gelten

$$h(a) = f(a) + 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a)$$

Also gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Man sieht leicht, dass die linke und rechte Seite dieser Gleichung mit (6.4) identisch ist. $\square$

Alternativ lässt sich (6.4) auch schreiben als

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Korollar 6.13 (Funktionen mit identischer Ableitung) Seien $f, g \in C([a, b])$, mit $a < b$, zwei in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Gilt $f'(\xi) = g'(\xi)$ für alle $\xi \in]a, b[$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Die Differenz $h(x) = f(x) - g(x)$ erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 6.12. Da $h'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in]a, b[$, folgt aus (6.4), mit $b = x$, die Beziehung $h(x) = h(a)$ für alle $x \in [a, b]$. Das Resultat folgt, indem man $c = h(a) = f(a) - g(a)$ setzt. $\square$

Als weitere wichtige Folgerung von Theorem 6.12 lässt sich nun die Monotonie einer in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbaren Funktion $f \in C([a, b])$ bequem untersuchen:

1. f ist monoton wachsend auf $[a, b]$ genau dann wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$;
2. f ist monoton fallend auf $[a, b]$ genau dann wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$;
3. f ist strikt monoton wachsend auf $[a, b]$ wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$;
4. f ist strikt monoton fallend auf $[a, b]$ wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Bei den Punkten 3 und 4 gilt die Rückrichtung *nicht*. So ist zum Beispiel $f(x) = x^3$ strikt monoton wachsend auf dem Intervall $[-1, 1]$ aber $f'(0) = 0$.

6.5 Die Regel von L'Hôpital

Theorem 6.14 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

[*Théorème d'accroissements finis généralisé*] Seien $f, g : C([a, b])$ mit $a < b$ zwei in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Nehmen wir weiter an, dass $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in]a, b[$. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ für das

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Es folgt aus $g'(x) \neq 0$, dass $g(b) \neq g(a)$, siehe Theorem 6.11 (Rolle rückwärts). Auch die Funktion h erfüllt die Bedingungen des Satzes von Rolle und wir haben $h(a) = f(a) = h(b)$. Also gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Division durch $g'(\xi) \neq 0$ ergibt die Behauptung. $\square$

Theorem 6.14 impliziert die **Regel von L'Hôpital** [*Règle de Bernoulli-L'Hôpital*]: Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in]a, b[$ differenzierbare Funktionen und gelten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

so fällt es schwer eine sinnvolle Aussage über den Grenzwert des Quotienten $f(x)/g(x)$ zu treffen. In diesen Fällen folgt aus Theorem 6.14

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

vorrausgesetzt letzterer Grenzwert existiert. Dies wird besonders einfach wenn die Grenzwerte $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ existieren und der Quotient $f'(x_0)/g'(x_0)$ sinnvoll gebildet werden kann. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos^2 x = 0.$$

Es gibt verschiedene Erweiterungen der Regel von L'Hôpital. Zum Beispiel kann der Grenzwert $x \rightarrow x_0$ durch die einseitigen Grenzwerte $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow b^-$, $x \rightarrow -\infty$, und $x \rightarrow \infty$ ersetzt werden (siehe [DZ]).

6.6 Lipschitz-Stetigkeit[★]

Sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt, so gibt es für jede $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ einen (von x, y abhängigen) Zwischenwert $\xi \in]x, y[$ so dass

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Ist nun f' in $]a, b[$ beschränkt und setzen wir $L := \sup_{\xi \in]a, b[} |f'(\xi)|$, so folgt daraus

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|. \quad (6.5)$$

Dass heisst, der Funktionswert kann sich nicht mehr als um den Faktor L im Vergleich zum Argument ändern.

Definition 6.15 Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst auf dem Intervall I **Lipschitz-stetig** [fonction lipschitzienne] wenn es ein $L > 0$ (die sogenannte Lipschitz-Konstante [constante de Lipschitz]) gibt, so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad (6.6)$$

für alle $x, y \in I$ gilt.

Bemerkungen:

- Eine Lipschitz-stetige Funktion ist immer stetig (sogar *gleichmässig* stetig); dies folgt direkt aus (6.6).
- Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in 0; sie ist aber auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$, da

$$|y - x| \geq ||y| - |x|| = |f(y) - f(x)|.$$

- Jede differenzierbare Funktion mit auf I beschränkter Ableitung $f'(x)$ ist Lipschitz-stetig.
- Andererseits ist nicht jede stetige Funktion auch Lipschitz-stetig. Betrachte dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$. Angenommen es gäbe eine Konstante L , so dass $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ gilt. Für $x = 0$ und $y > 0$ ergibt sich

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{y} \leq Ly \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \frac{1}{L^2}.$$

Damit kann (6.6) nicht für alle $x, y \in [0, 1]$ erfüllt sein. Man sieht das zugrundeliegende Problem auch leichter: $\sqrt{x}$ ist zwar auf $]0, 1[$ differenzierbar; die Ableitung $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ geht aber gegen ∞ für $x \rightarrow 0$.

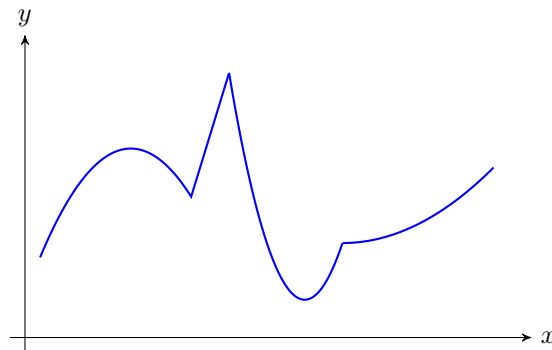


Abbildung 6.3. Funktion mit Knicken.

- Am besten stellt man sich eine Lipschitz-stetige Funktion als eine differenzierbare Funktion vor, in der aber zusätzlich einzelne “Knicke” erlaubt sind, solange diese Knicke nicht vertikal sind, siehe auch Abbildung 6.3. (Diese Vorstellung wird übrigens durch den Satz von Rademacher bestätigt.)

6.7 Höhere Ableitungen

Gegeben sei eine in jedem Punkt ihres Definitionsbereich E differenzierbare Funktion $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. Die Ableitung kann ebenfalls als (eine andere) Funktion $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Bemerkung. Prinzipiell schließt obige Definition ein abgeschlossenes Intervall $E = [a, b]$ aus, da f nicht in der Umgebung der Intervallränder a, b definiert ist und damit auch keine Ableitung in diesen Punkten existiert. Dies kann man aber leicht beheben, indem an den Intervallrändern die einseitigen Ableitungen (siehe Definition 6.6) benutzt werden:

$$f'_d(a) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_g(b) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}. \quad (6.7)$$

Das geht nicht immer gut, wie wir am Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ bereits gesehen haben. Existieren beide Grenzwerte (6.7) und ist f in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbar, so sagen wir, dass f auf $[a, b]$ differenzierbar ist. Wir definieren die Ableitung $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechend. $\diamond$

Ist f' auf E stetig, so wird f als **stetig differenzierbar** [*continuellement différentiable*] bezeichnet. Oft sind differenzierbare Funktionen auch stetig differenzierbar, aber es gibt Ausnahmen.

Beispiel 6.16 Eine Funktion auf $\mathbb{R}$, für welche die Ableitung zwar überall existiert

aber nicht stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese ist nicht stetig in 0, denn auf der Folge $(x_n = \frac{1}{2n\pi})$ konvergiert f' gegen 1. $\diamond$

Ist f' auf E nicht nur stetig sondern auch differenzierbar, so kann man die **zweite Ableitung** $f'' : E \rightarrow \mathbb{R}$ durch nochmaliges Differenzieren von f' bilden. Ist f'' auf E stetig, so nennt man sie **zwei Mal stetig differenzierbar**. Dieses Spiel kann man beliebig weiterführen, vorausgesetzt die Differenzierbarkeitsbedingung ist erfüllt.

Definition 6.17 Die Menge aller k Mal auf E stetig differenzierbaren Funktionen $f : E \rightarrow F$ wird mit $C^k(E, F)$ bezeichnet. Die Menge aller unendlich oft auf E differenzierbaren Funktionen $f : E \rightarrow F$ wird mit $C^\infty(E, F)$ bezeichnet.

Für die Ableitungen schreibt man auch

$$f^{(1)} := f', \quad f^{(2)} := f'', \quad f^{(3)} := f''', \quad \text{usw.}$$

Ab $k = 3$ bevorzugt man aber üblicherweise die Schreibweise $f^{(k)}$.

Polynomfunktionen, $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\log$, etc. sind C^∞ -Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Endliche Summen, Produkte und Kompositionen von C^∞ -Funktionen sind ebenfalls C^∞ .

6.8 Taylor-Entwicklung

Wir kommen noch einmal auf die Formel (6.1) zurück:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Die *lineare* Funktion $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist also für $x \approx x_0$ eine gute Approximation von $f(x)$. Dies ist sehr praktisch, da es ja viel einfacher ist mit einer linearen Funktion als mit der (allenfalls sehr komplizierten) Funktion f zu rechnen! Wir wollen nun die Güte dieser Approximation verbessern, indem wir f durch eine quadratische Funktion, oder allgemeiner, durch ein Polynom vom Grad n approximieren.

Definition 6.18 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in E$ definiert. Wir sagen f hat eine **Taylor-Entwicklung** [développement limité, développement de Taylor] vom Grad n um x_0 , wenn es ein Polynom p_n vom Grad höchstens n und eine Funktion (der Rest) $r_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0.$$

Mit den in Abschnitt 6.2 eingeführten Landau-Symbolen lässt sich eine Taylor-Entwicklung auch kürzer schreiben als

$$f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Lemma 6.19 Wenn f eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 hat, so ist diese eindeutig.

Beweis. Nehmen wir an, wir hätten zwei Taylor-Entwicklungen:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{und} \quad f(x) = q_n(x) + s_n(x),$$

wobei p_n, q_n Polynome vom Grad höchstens n sind, und $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $s_n(x) = o((x - x_0)^n)$. Setze

$$d_n(x) := p_n(x) - q_n(x) = r_n(x) - s_n(x).$$

Also ist $d_n(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens n und erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s_n(x) - r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 - 0 = 0.$$

Dies ist aber unmöglich für ein Polynom vom Grad höchstens n ; es sei denn, es ist 0. Also folgt $p_n = q_n$ und damit auch $r_n = s_n$. $\square$

Wir können also nun das Polynom p_n von Definition 6.18 als **das Taylor-Polynom** der Taylor-Entwicklung der Ordnung n von f um x_0 (falls es überhaupt existiert) bezeichnen.

Die Frage, ob und bis zu welcher Ordnung f eine Taylor-Entwicklung in x_0 hat, ist eine schwierige Frage. Für $(n + 1)$ Mal stetig differenzierbare Funktionen gibt es aber eine einfache Antwort.

Theorem 6.20 (Satz von Taylor) Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gilt für jedes $x_0 \in]a, b[$:

1. f hat eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0$$

2. Es ist

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

wobei $f^{(0)} = f$ und $0! = 1$.

3. Für jedes $x \in]a, b[$ gibt es (ein von x abhängiges) ξ_x zwischen a und x , so dass

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (6.8)$$

4. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Beweis. Der Beweis verwendet iterativ den Satz von Rolle (Theorem 6.11) für die Funktion

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{f(y) - p_n(y)}{(y - x_0)^{(n+1)}} (x - x_0)^{(n+1)},$$

wobei p_n das in (2) angegebene Polynom ist und $y \in]x_0, b[$ zunächst einmal beliebig gewählt ist. g ist $n+1$ Mal differenzierbar und man rechnet leicht nach, dass

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = g(y) = 0$$

gilt. Also gibt es nach dem Satz von Rolle einen Punkt $y_1 \in]x_0, y[$ so dass $g'(y_1) = 0$ gilt. Dann, immer noch nach Rolle, nun auf g' angewendet, ein $y_2 \in]x_0, y_1[$ mit $g''(y_2) = 0$, usw. bis schließlich $g^{(n)}(y_n) = 0$ für ein $y_n \in]x_0, y[$ gilt. Als letztes, immer noch nach Rolle, gibt es $\xi_x \in]x_0, y_n[$ mit $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Man rechnet nach, dass

$$0 = g^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(y) - p_n(y)}{(y - x_0)^{(n+1)}} (n+1)!$$

gilt. Für den Fall $x > x_0$ liefert dies den Ausdruck in (6.8) durch Einsetzen von x in y . Punkt 4 folgt direkt aus Punkt 3. Außerdem haben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \xi_x = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0) = 0.$$

Damit folgt Punkt 1. Punkt 2 ist per Definition von p_n richtig. Der Beweis für $x < x_0$ geht analog; man muss dann nur mit $y \in]a, x_0[$ starten. $\square$

Bemerkung 6.21 Bildet man die Ableitung von

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

so ergibt sich eine Taylor-Entwicklung von f' der Ordnung $n - 1$ um x_0 :

$$f'(x) = q_{n-1}(x) + s_{n-1}(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{s_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0,$$

mit $s_{n-1}(x) = r'_{n-1}(x)$ und

$$q_{n-1}(x) = p'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x - x_0)^k.$$

◇

Zwei weitere (nicht ganz so wichtige) Bemerkungen:

1. Wir haben bereits gesehen, dass die Differenzierbarkeit von f in x_0 äquivalent mit der Existenz einer Taylor-Entwicklung der Ordnung 1 ist. Jedoch Achtung: Die Existenz einer Taylor-Entwicklung der Ordnung $n \geq 2$ garantiert nicht die Existenz der zweiten Ableitung in diesem Punkt. Als Beispiel einer Funktion f mit Taylor-Entwicklung in $x_0 = 0$ ohne zweite Ableitung betrachte

$$f(x) = p_n(x) + x^n \cdot \epsilon(x) \quad \text{mit} \quad \epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

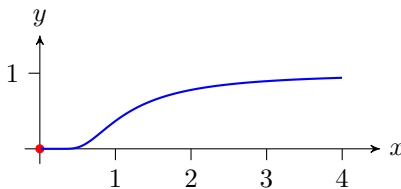
und p_n ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq n$.

2. Selbst wenn $f \in C^\infty([a, b])$, und deshalb eine Taylor-Entwicklung von beliebiger Ordnung hat, so muss nicht notwendig

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

folgen. Die Potenzreihe auf der rechten Seite nennt man die **Taylor-Reihe** der Funktion f in x_0 . Selbst auf der Konvergenzmenge dieser Reihe braucht die C^∞ -Funktion nicht mit ihrer Taylor-Reihe überein zu stimmen. Tut sie es dennoch in einer Umgebung von x_0 , so sagen wir, f ist dort **analytisch**. Als Beispiel einer Funktion $f \in C^\infty([a, b])$, die *nicht* analytisch ist, betrachte man in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$



Die Umkehrung der zweiten Bemerkung gilt hingegen schon: Eine durch eine konvergente Potenzreihe definierte Funktion muss mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmen.

Lemma 6.22 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe definiert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in]a, b[.$$

Dann ist diese Reihe bereits die Taylor-Reihe von f in x_0 , d.h., es gilt

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Beweis. Ableitung der gegebenen Potenzreihe ergibt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k (x - x_0)^{k-1}.$$

Nach insgesamt r Ableitungen ergibt sich

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} b_k k(k-1) \cdots (k-r+1) (x - x_0)^{k-r}.$$

Auswertung an der Stelle $x = x_0$ ergibt $f^{(r)}(x_0) = r! b_r$. $\square$

Einige Taylor-Entwicklungen, die man kennen sollte (bzw. bereits kennt):

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

6.9 Rechenregeln für Taylor-Entwicklungen

Im Folgenden werden wir einige Regeln zur Arbeit mit Taylor-Entwicklungen kennenlernen. Zunächst eine naheliegende Bemerkung.

Bemerkung 6.23 Wenn f eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 hat mit dem Polynom

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n,$$

dann hat f auch für jedes $m \leq n$ eine Taylor-Entwicklung der Ordnung m um x_0 mit Polynom

$$p_m(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_m(x - x_0)^m.$$

Lemma 6.24 (Teilen durch eine Potenz von $(x - x_0)$) Sei eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 von der Form

$$f(x) = a_m(x - x_0)^m + a_{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \cdots + a_n(x - x_0)^n + r_n(x),$$

für ein $1 \leq m \leq n$ gegeben. Dann kann die Funktion $g : x \mapsto \frac{f(x)}{(x - x_0)^m}$ in x_0 fortgesetzt werden, und diese Funktion hat dann eine Taylor-Entwicklung der Ordnung $n - m$ in x_0 :

$$g(x) = a_m + a_{m+1}(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-m} + r_{n-m}(x).$$

Zum Beispiel gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

und deshalb

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Lemma 6.25 (Summe) Wenn f und g Taylor-Entwicklungen der Ordnung n in x_0 mit Polynomen p_n und q_n haben, so hat $f + g$ die folgende Taylor-Entwicklung um x_0 :

$$(f + g)(x) = (p_n + q_n)(x) + o((x - x_0)^n).$$

Lemma 6.26 (Produkt) Wenn f und g Taylor-Entwicklungen der Ordnung n in x_0 mit den Polynomen p_n und q_n haben, so hat $f \cdot g$ die Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 . Das dazugehörige Polynom ist das Polynom vom Grad n , das entsteht, wenn wir vom Produkt $p_n \cdot q_n$ nur die Terme $(x - x_0)^m$ mit $m \leq n$ behalten.

Als Beispiel für Lemma 6.26 betrachten wir die Taylor-Entwicklungen

$$\log(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} + o((x - 1)^3)$$

und

$$\sin(x - 1) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^3}{6} + o((x - 1)^3).$$

Dann ist das Produkt der Polynomanteile gegeben durch

$$\begin{aligned} \left((x - 1) - \frac{(x - 1)^3}{6} \right) \cdot \left((x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} \right) \\ = (x - 1)^2 - \frac{(x - 1)^3}{2} + \frac{(x - 1)^4}{6} + \frac{(x - 1)^5}{12} - \frac{(x - 1)^6}{18}. \end{aligned}$$

Es ist dabei natürlich nicht nötig, die Terme höherer Potenzen auszurechnen, denn sie “verschwinden” sowieso in $o((x-1)^3)$. Es folgt

$$\log x \cdot \sin(x-1) = (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3).$$

Lemma 6.27 (Komposition) *Habe f eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 , mit Polynom p_n , und habe g eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, mit Polynom q_n . Dann hat $g \circ f$ eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 mit dem Polynom, das entsteht wenn man für die unbestimmte in q_n das Polynom p_n einsetzt und nur Terme $(x-x_0)^m$ mit $m \leq n$ behält.*

Beispiel 6.28 Wir berechnen die Taylor-Entwicklung der Ordnung 5 um $x_0 = 0$ vom Tangens. Wir kennen bereits

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 0 \cdot x^5 + o(x^5)$$

und setzen $u(x) := 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, also $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u(x)}$. Es gilt $u(0) = 0$ und

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5),$$

siehe oben bei den bekannten Taylor-Reihen. Hieraus erhalten wir durch Nacheinanderausführung

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

Schlussendlich ergibt sich nach Lemma 6.26 für das Produkt $\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ die Taylor-Entwicklung

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

◇

Die Regel für die **Division** zweier Taylor-Entwicklungen ist etwas komplizierter. Seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktionen mit Taylor-Entwicklungen der Ordnung n um x_0 :

$$f(x) = p_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{und} \quad g(x) = q_n(x) + o((x-x_0)^n).$$

Wir interessieren uns für Taylor-Entwicklungen um x_0 der Funktion $\frac{f}{g}$:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{p_n(x) + o((x-x_0)^n)}{q_n(x) + o((x-x_0)^n)}.$$

Zunächst möchten wir vermeiden, dass $p_n(x_0) = q_n(x_0) = 0$ gilt. Dies erreicht man durch Kürzen von Faktoren der Form $(x-x_0)^m$:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{p_{n-m}(x) + o((x-x_0)^{n-m})}{q_{n-m}(x) + o((x-x_0)^{n-m})},$$

wobei p_{n-m} und q_{n-m} Polynome vom Grad höchstens $n-m$ sind, und nicht beide gleichzeitig 0 an der Stelle x_0 . Wenn nun $q_{n-m}(x_0) = 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ nicht in x_0 stetig fortsetzbar. Gilt hingegen $q_{n-m}(x_0) \neq 0$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $q_{n-m}(x_0) = 1$ gilt, indem wir eine eventuell andere Konstante in p_{n-m} hineinnehmen. Also erhalten wir

$$\frac{f}{g}(x) = [p_{n-m}(x) + o((x-x_0)^{n-m})] \cdot \frac{1}{1 - (x-x_0) \cdot [T(x) + (x-x_0)^{n-m-1}\varepsilon(x)]},$$

wobei T ein Polynom vom Grad höchstens $n-m-1$ ist und $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. In dieser Form eines Produktes sehen wir, dass wir Taylor-Entwicklungen nur bis zur Ordnung $n-m$ erhoffen können. Jetzt wenden wir den Trick aus Beispiel 6.28 an und setzen $u(x) = T(x) - (x-x_0)^{n-m-1}\varepsilon(x)$. Wir erhalten

$$\frac{1}{1 - (x-x_0) \cdot u(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-m} ((x-x_0)^k \cdot u(x)^k) + o((x-x_0)^{n-m}).$$

Von dieser letzten Summe brauchen wir nur die Terme aus dem Polynom T in u zu berücksichtigen, die zu einer Potenz von $(x-x_0)^{n-m}$ beitragen:

$$\frac{1}{1 - (x-x_0) \cdot u(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-m} ((x-x_0)^k \cdot T(x)^k) + o((x-x_0)^{n-m}).$$

Dieser letzte Ausdruck, multipliziert mit $p_{n-m}(x) + o((x-x_0)^{n-m})$ liefert nach Lemma 6.26 eine Taylor-Entwicklung um x_0 der Ordnung $n-p$.

Bemerkung: Der Grenzwert eines Quotienten zweier Funktionen, die in x_0 den Wert 0 annehmen und dort Taylor-Entwicklungen haben, lässt sich durch den Quotienten der entsprechenden Taylor-Polynome leicht bestimmen. Es handelt sich darum die „Taylor-Entwicklung“ vom Grad 0 des Quotienten zu berechnen.

Beispiel 6.29 Wir wissen bereits

$$f(x) = \cos(x^2) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{4k},$$

$$g(x) = \sin(x^3) - x^4 = -x^4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{3(2k+1)}.$$

Um eine Taylor-Entwicklung der Ordnung $4 = n-m$ um $x_0 = 0$ der Funktion $\frac{f}{g}$ zu erhalten, sehen wir, dass wir x^3 ($m=3$) kürzen müssen, also die Funktionen f

und g bis zur Ordnung $n = 7$ entwickeln:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos(x^2) - 1 = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^7) \\
 g(x) &= \sin(x^3) - x^4 = x^3 - x^4 + o(x^7) \\
 \frac{f}{g}(x) &= \frac{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^7)}{x^3 - x^4 + o(x^7)} = \frac{-\frac{1}{2}x + o(x^4)}{1 - x + o(x^4)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x + o(x^4)\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^4 (x + o(x^4))^k + o(x^4)\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x + o(x^4)\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^4 x^k + o(x^4)\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x + o(x^4)\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4))
 \end{aligned}$$

Wir erhalten als Resultat die Taylor-Entwicklung der Ordnung 4 um 0:

$$\frac{\cos(x^2) - 1}{\sin(x^3) - x^4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

und können daraus den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{\sin(x^3) - x^4} = 0,$$

sowie die Ableitungen leicht ablesen. ◇

6.10 Hinreichende Optimalitätsbedingungen und Konvexität

Wir setzen unsere Diskussion von Abschnitt 6.3 fort und zeigen nun eine *hinreichende* Bedingung für lokale Extrema.

Theorem 6.30 *Betrachte $f \in C^n(I)$ für ein offenes Intervall I und n gerade. Seien für $x_0 \in I$ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0 .*
2. *Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in x_0 .*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil; der Beweis des zweiten Teils erfolgt analog. Aufgrund der Voraussetzungen folgt aus dem Satz von Taylor, dass

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} (x - x_0)^n$$

für ein ξ_x zwischen x_0 und x . Wegen $f^{(n)}(x_0) > 0$ und der Stetigkeit von $f^{(n)}$ folgt, dass $f^{(n)}(\xi_x) > 0$ falls x genügend nahe bei x_0 . Dann folgt $f(x) - f(x_0) \geq 0$; also ist x_0 lokales Minimum. $\square$

Typischerweise verwendet man Theorem 6.30 mit $n = 2$. Gilt dann $f^{(2)}(x_0) = 0$ so lässt sich (ohne weiteres Ableiten) nichts darüber aussagen, ob f ein Extremum in x_0 besitzt. Die Bedingung $f^{(2)}(x_0) = 0$ (ohne dass notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ gilt) ist übrigens auch ein notwendiges Kriterium, dass f einen Wendepunkt [*point d'inflexion*] in x_0 hat; siehe [DZ].

Definition 6.31 Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst konvex auf I , falls für jedes Paar $x_1, x_2 \in I$ und jedes $t \in [0, 1]$ gilt

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Die Funktion f ist strikt konvex, wenn für jedes Paar $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ und jedes $t \in]0, 1[$ gilt

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Eine Funktion f heisst (strikt) konkav, falls $-f$ (strikt) konvex ist.

Theorem 6.32 (Jensensche Ungleichung.) Sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf I konvex, wenn für jedes n -tupel $x_1, x_2, \dots, x_n$ von I und jedes n -tupel $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, die Ungleichung

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

erfüllt ist.

Die Jensensche Ungleichung kann mittels Induktion gezeigt werden; siehe Abschnitt 5.5.3 in [DZ].

Lemma 6.33 Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf I . Dann ist f genau dann konvex, wenn $f'(x)$ eine monoton steigende Funktion auf I ist.

Beweis. Wir können annehmen, dass $x_1 \leq x_2$. Also gilt $x_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq x_2$ für jedes $t \in]0, 1[$.

1. Sei f konvex und differenzierbar. Also

$$f'(x_1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t \neq 1}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

und

$$f'(x_2) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_2)}{-t(x_2 - x_1)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Folglich

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

2. Sei f' steigend und $x_1 < x_2$. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert für jedes $t \in]0, 1[$ jeweils c_1, c_2 , sodass $x_1 \leq c_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq c_2 \leq x_2$ und

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}.$$

Also

$$t(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)) \leq (1-t)(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)),$$

was bedeutet, dass f konvex ist.

□

Als wichtigste Konsequenz von Lemma 6.33 ergeben sich die folgende Ungleichungen für eine konvexe und differenzierbare Funktion:

$$f'(x)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y - x)$$

gilt für jedes $x, y \in I$. Falls f strikt konvex ist, sind die Ungleichungen strikt für $x \neq y$.

Korollar 6.34 Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Sei x_0 ein kritischer Punkt von f . Dann hat f ein (globales) Minimum in x_0 . Ist f zusätzlich strikt konvex, so ist dies das einzige Minimum.