

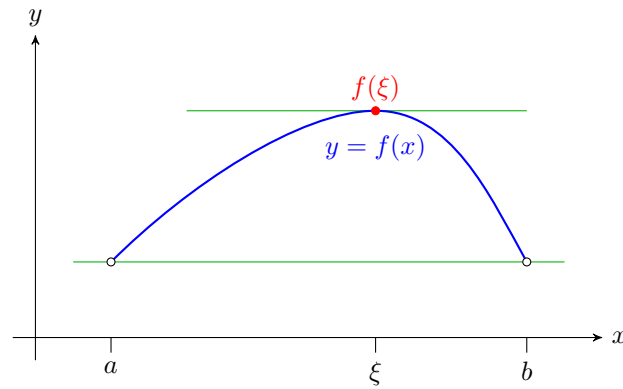


Abbildung 6.1. Illustration des Satzes von Rolle.

Beweis. Da f stetig ist, gilt $f([a, b]) = [m, M]$. Wenn die einzigen Punkte, wo f die Werte m und M annimmt, a und b sind, so ist $m = M$ und f ist konstant. In diesem Fall gilt $f'(\xi) = 0$ für jedes $\xi \in]a, b[$. Wenn nicht, so findet man $\xi \in]a, b[$ so dass $f(\xi) = m$ oder $f(\xi) = M$. An einer derartigen Stelle gilt aber $f'(\xi) = 0$, siehe Theorem 6.8. $\square$

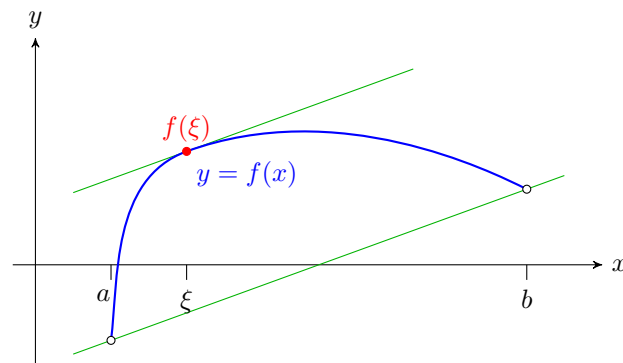


Abbildung 6.2. Illustration des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Theorem 6.12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) [*Théorème des accroissements finis*] Sei $f \in C([a, b])$, mit $a < b$, eine in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ so dass

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a). \quad (6.4)$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen des Satzes von Rolle, Theorem 6.11. Ausserdem gelten

$$h(a) = f(a) + 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a)$$

Also gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Man sieht leicht, dass die linke und rechte Seite dieser Gleichung mit (6.4) identisch ist. $\square$

Alternativ lässt sich (6.4) auch schreiben als

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Korollar 6.13 (Funktionen mit identischer Ableitung) Seien $f, g \in C([a, b])$, mit $a < b$, zwei in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Gilt $f'(\xi) = g'(\xi)$ für alle $\xi \in]a, b[$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Die Differenz $h(x) = f(x) - g(x)$ erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 6.12. Da $h'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in]a, b[$, folgt aus (6.4), mit $b = x$, die Beziehung $h(x) = h(a)$ für alle $x \in [a, b]$. Das Resultat folgt, indem man $c = h(a) = f(a) - g(a)$ setzt. $\square$

Als weitere wichtige Folgerung von Theorem 6.12 lässt sich nun die Monotonie einer in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbaren Funktion $f \in C([a, b])$ bequem untersuchen:

1. f ist monoton wachsend auf $[a, b]$ genau dann wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$;
2. f ist monoton fallend auf $[a, b]$ genau dann wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$;
3. f ist strikt monoton wachsend auf $[a, b]$ wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$;
4. f ist strikt monoton fallend auf $[a, b]$ wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Bei den Punkten 3 und 4 gilt die Rückrichtung *nicht*. So ist zum Beispiel $f(x) = x^3$ strikt monoton wachsend auf dem Intervall $[-1, 1]$ aber $f'(0) = 0$.

6.5 Die Regel von L'Hôpital

Theorem 6.14 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

[Théorème d'accroissements finis généralisé] Seien $f, g : C([a, b])$ mit $a < b$ zwei in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktionen. Nehmen wir weiter an, dass $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in]a, b[$. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ für das

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Es folgt aus $g'(x) \neq 0$, dass $g(b) \neq g(a)$, siehe Theorem 6.11 (Rolle rückwärts). Auch die Funktion h erfüllt die Bedingungen des Satzes von Rolle und wir haben $h(a) = f(a) = h(b)$. Also gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Division durch $g'(\xi) \neq 0$ ergibt die Behauptung. $\square$

Theorem 6.14 impliziert die **Regel von L'Hôpital** [Règle de Bernoulli-L'Hôpital]: Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in]a, b[$ differenzierbare Funktionen und gelten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

so fällt es schwer eine sinnvolle Aussage über den Grenzwert des Quotienten $f(x)/g(x)$ zu treffen. In diesen Fällen folgt aus Theorem 6.14

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

vorrausgesetzt letzterer Grenzwert existiert. Dies wird besonders einfach wenn die Grenzwerte $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ existieren und der Quotient $f'(x_0)/g'(x_0)$ sinnvoll gebildet werden kann. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos^2 x = 0.$$

Es gibt verschiedene Erweiterungen der Regel von L'Hôpital. Zum Beispiel kann der Grenzwert $x \rightarrow x_0$ durch die einseitigen Grenzwerte $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow b^-$, $x \rightarrow -\infty$, und $x \rightarrow \infty$ ersetzt werden (siehe [DZ]).

6.6 Lipschitz-Stetigkeit[★]

Sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt, so gibt es für jede $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ einen (von x, y abhängigen) Zwischenwert $\xi \in]x, y[$ so dass

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Ist nun f' in $]a, b[$ beschränkt und setzen wir $L := \sup_{\xi \in]a, b[} |f'(\xi)|$, so folgt daraus

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|. \quad (6.5)$$

Dass heisst, der Funktionswert kann sich nicht mehr als um den Faktor L im Vergleich zum Argument ändern.

Definition 6.15 Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst auf dem Intervall I **Lipschitz-stetig** [fonction lipschitzienne] wenn es ein $L > 0$ (die sogenannte Lipschitz-Konstante [constante de Lipschitz]) gibt, so dass

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad (6.6)$$

für alle $x, y \in I$ gilt.

Bemerkungen:

- Eine Lipschitz-stetige Funktion ist immer stetig (sogar *gleichmässig* stetig); dies folgt direkt aus (6.6).
- Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in 0; sie ist aber auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$, da

$$|y - x| \geq ||y| - |x|| = |f(y) - f(x)|.$$

- Jede differenzierbare Funktion mit auf I beschränkter Ableitung $f'(x)$ ist Lipschitz-stetig.
- Andererseits ist nicht jede stetige Funktion auch Lipschitz-stetig. Betrachte dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = [0, 1]$. Angenommen es gäbe eine Konstante L , so dass $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ gilt. Für $x = 0$ und $y > 0$ ergibt sich

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{y} \leq Ly \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \frac{1}{L^2}.$$

Damit kann (6.6) nicht für alle $x, y \in [0, 1]$ erfüllt sein. Man sieht das zugrundeliegende Problem auch leichter: $\sqrt{x}$ ist zwar auf $]0, 1[$ differenzierbar; die Ableitung $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ geht aber gegen ∞ für $x \rightarrow 0$.

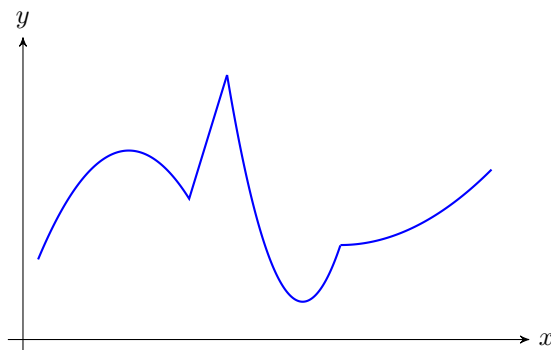


Abbildung 6.3. Funktion mit Knicken.

- Am besten stellt man sich eine Lipschitz-stetige Funktion als eine differenzierbare Funktion vor, in der aber zusätzlich einzelne “Knicke” erlaubt sind, solange diese Knicke nicht vertikal sind, siehe auch Abbildung 6.3. (Diese Vorstellung wird übrigens durch den Satz von Rademacher bestätigt.)

6.7 Höhere Ableitungen

Gegeben sei eine in jedem Punkt ihres Definitionsbereich E differenzierbare Funktion $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. Die Ableitung kann ebenfalls als (eine andere) Funktion $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Bemerkung. Prinzipiell schließt obige Definition ein abgeschlossenes Intervall $E = [a, b]$ aus, da f nicht in der Umgebung der Intervallränder a, b definiert ist und damit auch keine Ableitung in diesen Punkten existiert. Dies kann man aber leicht beheben, indem an den Intervallrändern die einseitigen Ableitungen (siehe Definition 6.6) benutzt werden:

$$f'_d(a) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_g(b) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}. \quad (6.7)$$

Das geht nicht immer gut, wie wir am Beispiel $f(x) = \sqrt{x}$ bereits gesehen haben. Existieren beide Grenzwerte (6.7) und ist f in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbar, so sagen wir, dass f auf $[a, b]$ differenzierbar ist. Wir definieren die Ableitung $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechend. $\diamond$

Ist f' auf E stetig, so wird f als **stetig differenzierbar** [*continuellement différentiable*] bezeichnet. Oft sind differenzierbare Funktionen auch stetig differenzierbar, aber es gibt Ausnahmen.

Beispiel 6.16 Eine Funktion auf $\mathbb{R}$, für welche die Ableitung zwar überall existiert

aber nicht stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese ist nicht stetig in 0, denn auf der Folge $(x_n = \frac{1}{2n\pi})$ konvergiert f' gegen 1. $\diamond$

Ist f' auf E nicht nur stetig sondern auch differenzierbar, so kann man die **zweite Ableitung** $f'' : E \rightarrow \mathbb{R}$ durch nochmaliges Differenzieren von f' bilden. Ist f'' auf E stetig, so nennt man sie **zwei Mal stetig differenzierbar**. Dieses Spiel kann man beliebig weiterführen, vorausgesetzt die Differenzierbarkeitsbedingung ist erfüllt.

Definition 6.17 Die Menge aller k Mal auf E stetig differenzierbaren Funktionen $f : E \rightarrow F$ wird mit $C^k(E, F)$ bezeichnet. Die Menge aller unendlich oft auf E differenzierbaren Funktionen $f : E \rightarrow F$ wird mit $C^\infty(E, F)$ bezeichnet.

Für die Ableitungen schreibt man auch

$$f^{(1)} := f', \quad f^{(2)} := f'', \quad f^{(3)} := f''', \quad \text{usw.}$$

Ab $k = 3$ bevorzugt man aber üblicherweise die Schreibweise $f^{(k)}$.

Polynomfunktionen, $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\log$, etc. sind C^∞ -Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Endliche Summen, Produkte und Kompositionen von C^∞ -Funktionen sind ebenfalls C^∞ .

6.8 Taylor-Entwicklung

Wir kommen noch einmal auf die Formel (6.1) zurück:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Die *lineare* Funktion $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist also für $x \approx x_0$ eine gute Approximation von $f(x)$. Dies ist sehr praktisch, da es ja viel einfacher ist mit einer linearen Funktion als mit der (allenfalls sehr komplizierten) Funktion f zu rechnen! Wir wollen nun die Güte dieser Approximation verbessern, indem wir f durch eine quadratische Funktion, oder allgemeiner, durch ein Polynom vom Grad n approximieren.

Definition 6.18 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in E$ definiert. Wir sagen f hat eine **Taylor-Entwicklung** [développement limité, développement de Taylor] vom Grad n um x_0 , wenn es ein Polynom p_n vom Grad höchstens n und eine Funktion (der Rest) $r_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0.$$

Mit den in Abschnitt 6.2 eingeführten Landau-Symbolen lässt sich eine Taylor-Entwicklung auch kürzer schreiben als

$$f(x) = p_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Lemma 6.19 Wenn f eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 hat, so ist diese eindeutig.

Beweis. Nehmen wir an, wir hätten zwei Taylor-Entwicklungen:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{und} \quad f(x) = q_n(x) + s_n(x),$$

wobei p_n, q_n Polynome vom Grad höchstens n sind, und $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $s_n(x) = o((x - x_0)^n)$. Setze

$$d_n(x) := p_n(x) - q_n(x) = r_n(x) - s_n(x).$$

Also ist $d_n(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens n und erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s_n(x) - r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 - 0 = 0.$$

Dies ist aber unmöglich für ein Polynom vom Grad höchstens n ; es sei denn, es ist 0. Also folgt $p_n = q_n$ und damit auch $r_n = s_n$. $\square$

Wir können also nun das Polynom p_n von Definition 6.18 als **das Taylor-Polynom** der Taylor-Entwicklung der Ordnung n von f um x_0 (falls es überhaupt existiert) bezeichnen.

Die Frage, ob und bis zu welcher Ordnung f eine Taylor-Entwicklung in x_0 hat, ist eine schwierige Frage. Für $(n + 1)$ Mal stetig differenzierbare Funktionen gibt es aber eine einfache Antwort.

Theorem 6.20 (Satz von Taylor) Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gilt für jedes $x_0 \in]a, b[$:

1. f hat eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{|x - x_0|^n} = 0$$

2. Es ist

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

wobei $f^{(0)} = f$ und $0! = 1$.

3. Für jedes $x \in]a, b[$ gibt es (ein von x abhängiges) ξ_x zwischen a und x , so dass

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (6.8)$$

4. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Beweis. Der Beweis verwendet iterativ den Satz von Rolle (Theorem 6.11) für die Funktion

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{f(y) - p_n(y)}{(y - x_0)^{(n+1)}} (x - x_0)^{(n+1)},$$

wobei p_n das in (2) angegebene Polynom ist und $y \in]x_0, b[$ zunächst einmal beliebig gewählt ist. g ist $n+1$ Mal differenzierbar und man rechnet leicht nach, dass

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = g(y) = 0$$

gilt. Also gibt es nach dem Satz von Rolle einen Punkt $y_1 \in]x_0, y[$ so dass $g'(y_1) = 0$ gilt. Dann, immer noch nach Rolle, nun auf g' angewendet, ein $y_2 \in]x_0, y_1[$ mit $g''(y_2) = 0$, usw. bis schließlich $g^{(n)}(y_n) = 0$ für ein $y_n \in]x_0, y[$ gilt. Als letztes, immer noch nach Rolle, gibt es $\xi_x \in]x_0, y_n[$ mit $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Man rechnet nach, dass

$$0 = g^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(y) - p_n(y)}{(y - x_0)^{(n+1)}} (n+1)!$$

gilt. Für den Fall $x > x_0$ liefert dies den Ausdruck in (6.8) durch Einsetzen von x in y . Punkt 4 folgt direkt aus Punkt 3. Außerdem haben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \xi_x = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0) = 0.$$

Damit folgt Punkt 1. Punkt 2 ist per Definition von p_n richtig. Der Beweis für $x < x_0$ geht analog; man muss dann nur mit $y \in]a, x_0[$ starten. $\square$

Bemerkung 6.21 Bildet man die Ableitung von

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

so ergibt sich eine Taylor-Entwicklung von f' der Ordnung $n - 1$ um x_0 :

$$f'(x) = q_{n-1}(x) + s_{n-1}(x) \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{s_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0,$$

mit $s_{n-1}(x) = r'_{n-1}(x)$ und

$$q_{n-1}(x) = p'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x - x_0)^k.$$

◇

Zwei weitere (nicht ganz so wichtige) Bemerkungen:

1. Wir haben bereits gesehen, dass die Differenzierbarkeit von f in x_0 äquivalent mit der Existenz einer Taylor-Entwicklung der Ordnung 1 ist. Jedoch Achtung: Die Existenz einer Taylor-Entwicklung der Ordnung $n \geq 2$ garantiert nicht die Existenz der zweiten Ableitung in diesem Punkt. Als Beispiel einer Funktion f mit Taylor-Entwicklung in $x_0 = 0$ ohne zweite Ableitung betrachte

$$f(x) = p_n(x) + x^n \cdot \epsilon(x) \quad \text{mit} \quad \epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

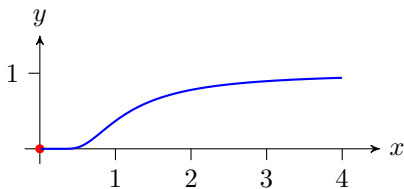
und p_n ein beliebiges Polynom vom Grad $\leq n$.

2. Selbst wenn $f \in C^\infty([a, b])$, und deshalb eine Taylor-Entwicklung von beliebiger Ordnung hat, so muss nicht notwendig

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

folgen. Die Potenzreihe auf der rechten Seite nennt man die **Taylor-Reihe** der Funktion f in x_0 . Selbst auf der Konvergenzmenge dieser Reihe braucht die C^∞ -Funktion nicht mit ihrer Taylor-Reihe überein zu stimmen. Tut sie es dennoch in einer Umgebung von x_0 , so sagen wir, f ist dort **analytisch**. Als Beispiel einer Funktion $f \in C^\infty([a, b])$, die *nicht* analytisch ist, betrachte man in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$



Die Umkehrung der zweiten Bemerkung gilt hingegen schon: Eine durch eine konvergente Potenzreihe definierte Funktion muss mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmen.

Lemma 6.22 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe definiert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in]a, b[.$$

Dann ist diese Reihe bereits die Taylor-Reihe von f in x_0 , d.h., es gilt

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Beweis. Ableitung der gegebenen Potenzreihe ergibt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k (x - x_0)^{k-1}.$$

Nach insgesamt r Ableitungen ergibt sich

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} b_k k(k-1) \cdots (k-r+1) (x - x_0)^{k-r}.$$

Auswertung an der Stelle $x = x_0$ ergibt $f^{(r)}(x_0) = r! b_r$. $\square$

Einige Taylor-Entwicklungen, die man kennen sollte (bzw. bereits kennt):

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

6.9 Rechenregeln für Taylor-Entwicklungen

Im Folgenden werden wir einige Regeln zur Arbeit mit Taylor-Entwicklungen kennenlernen. Zunächst eine naheliegende Bemerkung.

Bemerkung 6.23 Wenn f eine Taylor-Entwicklung der Ordnung n um x_0 hat mit dem Polynom

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n,$$