

Kapitel 6

Ableitung einer Funktion

Definition 6.1 Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$ definiert. Dann ist f **differenzierbar an der Stelle x_0** [f est dérivable en x_0] wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert wird **Ableitung von f in x_0** [dérivée de f au point x_0] genannt, und wir schreiben

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Alternativ kann man die Ableitung durch Einführung der Variable $h := x - x_0$ auch wie folgt definieren:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Diese Form eignet sich oft besser zum Berechnen.

Wenn $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in E$ ist, so können wir die Funktion

$$r(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

definieren. Für $x \neq x_0$ ergibt sich

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

oder, in Worten, $r(x)$ konvergiert für $x \rightarrow x_0$ schneller als $x - x_0$ gegen 0. Die Funktion $r(x)$ hat eine konkrete Interpretation: Sie ist der Fehler, den man macht,

wenn man in der Nähe von x_0 die Funktion f durch die lineare Funktion $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x). \quad (6.1)$$

Man sieht sofort, dass f an der Stelle x_0 stetig sein muss. **Aus Differenzierbarkeit folgt also immer Stetigkeit.**

Die Existenz einer Funktion r mit obigen Eigenschaften ist äquivalent zur Differenzierbarkeit.

Theorem 6.2 *Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$ definiert. Dann ist f differenzierbar an der Stelle x_0 genau dann wenn es eine Funktion $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt so dass*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$$

und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ gelten. In diesem Fall ist $a = f'(x_0)$.

Beweis. Eine Richtung wurde bereits oben nachgewiesen. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass es eine Funktion r mit den genannten Eigenschaften gibt. Dann folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{r(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a.$$

□

Bemerkung: Im Buch von Douchet/Zwahlen wird sprachlich zwischen Definition 6.1 [f est dérivable en x_0] und der äquivalenten Charakterisierung mittels der Existenz von $r(x)$ [f est différentiable en x_0] sprachlich unterschieden. Dies ist eher ungewöhnlich.

6.1 Beispiele und Rechenregeln

Wir geben zunächst einige einfache Beispiele an.

- $f(x) = x^n$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.
Nachweis: Nach der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (x_0 + h)^n - x_0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n \\ &= nx_0^{n-1}h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k. \end{aligned}$$

Da im zweiten Term nur Potenzen h^k mit $k \geq 2$ auftauchen, gilt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = nx_0^{n-1}.$$

- $f(x) = e^x$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = e^{x_0}$. Die Ableitung von der Exponentialfunktion ist also wieder die Exponentialfunktion.
Nachweis: Aus $e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$ folgt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = e^{x_0}(e^h - 1) = e^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = e^{x_0}h + e^{x_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}.$$

Wieder tauchen im zweiten Term nur Potenzen h^k mit $k \geq 2$ auf; also folgt
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = e^{x_0}.$

- $f(x) = \sin x$ ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \cos x_0$.
Nachweis: Mit Hilfe der Rechenregeln für Sinus und Cosinus ergibt sich

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \cos(x_0 + h/2) \cdot \sin(h/2). \quad (6.2)$$

Wir müssen jetzt noch ausnutzen, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ gilt. Diese Beziehung erhält man aus der Definition des Sinus als Potenzreihe (siehe Abschnitt 4.4):

$$\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^{2m+1}}{(2m+1)!} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon^{2m}}{(2m+1)!} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

Es ergibt sich also aus (6.2), dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x_0.$$

- Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist *nicht* in $x_0 = 0$ differenzierbar, da für $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ nicht existiert.

Das folgende Theorem enthält (fast) alle wichtigen Rechenregeln mit Ableitungen.

Theorem 6.3 Seien $f, g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in E$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

- (b) Produktregel: $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

- (c) Quotientenregel: Wenn $g(x_0) \neq 0$ dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(d) Kettenregel: Sei nun $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(E) \subset G$, in der Umgebung von $f(x_0)$ definiert. Wenn g in $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Wir beweisen nur (b) und (d).

Zu (b): Aus

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0 + h) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0)) \end{aligned}$$

folgt sofort

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Zu (d): Setze $y_0 := f(x_0)$. Aus den Beziehungen

$$f(x_0 + h) = y_0 + f'(x_0)h + r(x_0 + h), \quad g(y_0 + h) = g(y_0) + g'(y_0)h + q(y_0 + h),$$

mit $r(x_0 + h)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und $q(y_0 + h)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, folgt

$$g(f(x_0 + h)) = g(y_0 + \underbrace{f'(x_0)h + r(x_0 + h)}_{=: \tilde{h}}) = g(y_0) + g'(y_0)\tilde{h} + q(y_0 + \tilde{h}).$$

Da $\tilde{h}/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)$, ergibt sich daraus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(y_0)f'(x_0),$$

wobei zusätzlich noch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot \frac{\tilde{h}}{h} = \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{q(y_0 + \tilde{h})}{\tilde{h}} \cdot f'(x_0) = 0$$

ausgenutzt wurde. $\square$

Im Folgenden werden wir uns ein wenig entspannen und nicht mehr zwischen x und x_0 unterscheiden, wenn es nicht unbedingt notwendig ist.

Bemerkung 6.4 Wer sich die Quotientenregel schlecht merken kann, merkt sich einfach nur der Beziehung $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ und macht den Rest mit der Produktregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

$\diamond$

Mit den Regeln von Theorem 6.3 lassen sich jetzt bequem Ableitungen für weitere Funktionen finden.

- Für $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $x \neq 0$ folgt aus der Quotientenregel

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

- Da $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, erhalten wir aus der Kettenregel mit $g(y) = \sin(y)$ und $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$:

$$\cos' x = g'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

- Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ergibt sich die Ableitung von $\tan x$ aus

$$\tan' x = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Das folgende Resultat ist vielleicht etwas überraschend: Man kann die Ableitung der Umkehrfunktion sehr einfach aus der Ableitung der Originalfunktion bestimmen.

Theorem 6.5 Sei $f : I \rightarrow F$ bijektiv für ein ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Weiterhin sei f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : F \rightarrow I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Ableitung der Beziehung $y = (f \circ f^{-1})(y)$ führt mit der Kettenregel auf

$$1 = (f \circ f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0).$$

Division durch $f'(f^{-1}(y_0))$ liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Zwei wichtige Beispiele für die Anwendung von Theorem 6.5.

- Wie betrachten $\arctan(y)$, die Umkehrfunktion vom $\tan x$:

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2},$$

wobei wir im letzten Schritt die Beziehung $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ ausgenutzt haben.

- Der Ableitung des Logarithmus $\log : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist

$$\log' y = \frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

Zum Abschluss dieses grundlegenden Abschnitts noch die Erweiterung von einseitigen Grenzwerten (siehe Abschnitt 5.6.1) auf Ableitungen.

Definition 6.6 Sei $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in E$.

- Falls f rechts von x_0 definiert ist, dann heisst f **rechtsseitig differenzierbar** [*dérivable à droite*] in x_0 wenn der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst **rechtsseitige Ableitung** [*dérivée à droite*] und wird mit $f'_d(x_0)$ bezeichnet.

- Falls f links von x_0 definiert ist, dann heisst f **linksseitig differenzierbar** [*dérivable à gauche*] in x_0 wenn der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heisst **linksseitige Ableitung** [*dérivée à gauche*] und wird mit $f'_g(x_0)$ bezeichnet.

Aus Theorem 5.24 folgt sofort, dass eine in der Umgebung von x_0 definierte Funktion genau dann in x_0 differenzierbar ist wenn sie links- und rechtsseitig differenzierbar ist und $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dies erleichtert die Untersuchung von stückweise definierten Funktionen erheblich. Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x < a \\ f_2(x) & \text{für } x \geq a, \end{cases}$$

für zwei in a differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Um nachzuweisen, dass f in $x_0 = a$ differenzierbar ist, geht man wie folgt vor:

1. Nachweis, dass f in $x_0 = a$ stetig ist, dass heisst Nachweis von $\lim_{x \rightarrow a^-} f_1(x) = f_2(a)$.
2. Nachweis, dass $f'_1(a) = f'_2(a)$.

Da die links- bzw. rechtsseitige Ableitung von f in a durch $f'_1(a)$ bzw. $f'_2(a)$ gegeben ist, folgt damit, dass f in differenzierbar ist.

6.2 Exkurs in die O -Notation

Die Landauschen Symbole [*notations de Landau*] o und O erlauben es, Approximationen wie die lineare Approximation (6.1) besonders kompakt auszudrücken, wenn die genaue Form des Fehlerterms r nicht von Interesse ist. Man muss sich allerdings ein wenig an die Schreibweise gewöhnen.

Wenn für eine gegebene Funktion r der Quotient $\frac{r(h)}{h}$ mit $h \rightarrow 0$ gegen 0 geht, sagt man $r(h)$ sei “klein oh” von h und schreibt

$$r(h) = o(h). \quad (\text{für } h \rightarrow 0)$$

Man beachte, dass $o(h)$ hier *nicht* als Funktionswert zu verstehen ist, sondern nur als Aussage über das Verhalten der Funktion r in der Nähe von 0. Jetzt kann man zum Beispiel statt (6.1) schreiben

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad (h \rightarrow 0) \quad (6.3)$$

und meint damit, dass es irgendeine (nicht näher bekannte) Funktion r mit $r(h) = o(h)$ gibt, so dass $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$.

Obige Definition kann von $o(h)$ auf $o(q(h))$ für eine beliebige Funktion q (meist $q(h) = h^k$) und auf beliebige Grenzübergänge $x \rightarrow \xi$ verallgemeinert werden:

$$r(x) = o(q(x)), \quad (\text{für } x \rightarrow \xi)$$

schreibt man, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0$$

gilt. Einige Beispiele:

- $3h^{n+1} + h^n = o(h^k)$ für $h \rightarrow 0$ wenn $k \leq n - 1$;
- $\frac{\sin h}{h} - 1 = o(h)$ für $h \rightarrow 0$;
- $\frac{1}{t} = o(1)$ für $t \rightarrow \infty$;
- $t^{1000} = o(e^t)$ für $t \rightarrow \infty$.

Wenn für eine gegebene Funktion R der Quotient $\frac{R(x)}{q(x)}$ für $x \rightarrow \xi$ beschränkt bleibt, schreibt man

$$R(x) = O(q(x)), \quad (\text{für } x \rightarrow \xi).$$

Offenbar folgt aus $R(x) = o(q(x))$ immer $R(x) = O(q(x))$. Diese “gross Oh”-Notation erlaubt es mitunter das Grenzverhalten feiner zu beschreiben. Zum Beispiel werden wir sehen, dass für eine zwei Mal differenzierbare Funktion statt (6.3) auch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

geschrieben werden kann. Einige weitere Beispiele:

- $3h^{n+1} + 3h^n = O(h^k)$ für $h \rightarrow 0$ wenn $k \leq n$;
- $\frac{\sin h}{h} - 1 = O(h^2)$ für $h \rightarrow 0$;
- $4t^{100} + 3t^{50} = O(t^{100})$ für $t \rightarrow \infty$.

6.3 Lokale Extrema

Aus Korollar 5.31 wissen wir bereits, dass eine stetige Funktion $f \in C([a, b])$ immer ihr Minimum und Maximum auf dem Intervall $[a, b]$ annimmt. Diese bezeichnet man auch als *globales* Minimum und *globales* Maximum, um sie von den in diesem Abschnitt behandelten lokalen Minimum/Maximum zu unterscheiden.

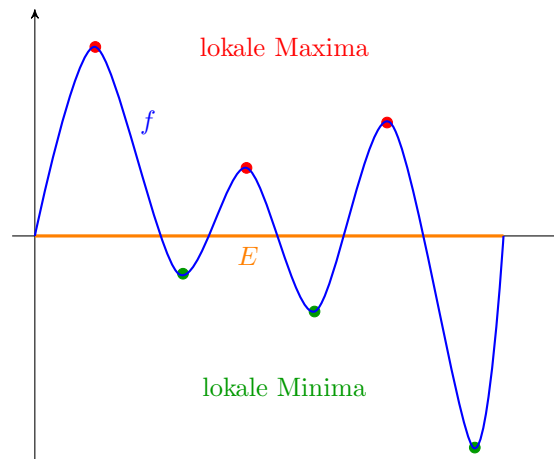
Definition 6.7 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in E$ definiert. f hat ein **lokales Maximum** [maximum local] in x_0 , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f hat ein **lokales Minimum** [minimum local] in x_0 , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Im Gegensatz zum (globalen) Maximum darf f weiter weg von einem lokalen Maximum x_0 auch grössere Werte annehmen. Lokale Minima und lokale Maxima nennt man auch **lokale Extrema** [extrema locaux].



Graph einer Funktion mit mehreren lokalen Extrema.

Theorem 6.8 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in E$ differenzierbar. Hat f ein lokales Extremum in x_0 , so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Angenommen, f habe ein lokales Maximum in x_0 . Dann gelten

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

sowie

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

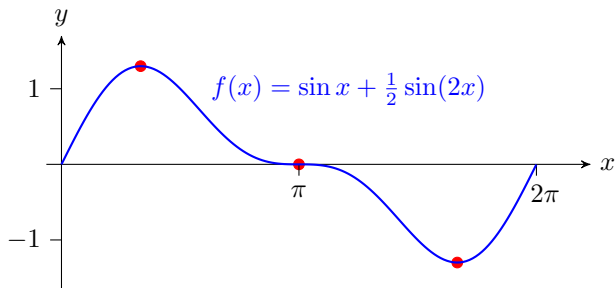
Also folgt $f'(x_0) = 0$. Für ein lokales Minimum erfolgt der Beweis analog, mit umgekehrten Vorzeichen. $\square$

Einen Punkt $x_0 \in E$ mit $f'(x_0) = 0$ nennt man einen **kritischen Punkt** [*point critique*] (oder auch: **stationären Punkt** [*point stationnaire*]) von f . Nicht alle kritischen Punkte sind lokale Maxima oder Minima.

Beispiel 6.9 Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Am Graph sieht man leicht, dass diese Funktion drei kritische Punkte hat:



Aus der Ableitung

$$f'(x) = \cos x + \cos(2x) = \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

ergeben sich im Intervall $[0, 2\pi]$ die drei kritischen Punkte

$$\frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3},$$

von denen aber nur zwei Punkte auch lokale Extrema sind. $\diamond$

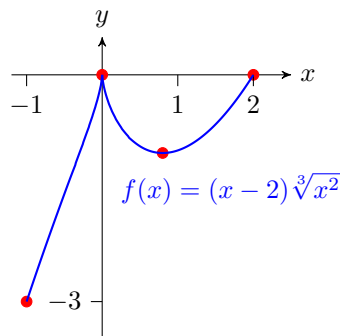
Um das (globale) Maximum oder Minimum einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, müssen wir unter den folgenden Kandidaten suchen:

- Punkte am Rand: a, b ;
- Punkte, an denen f nicht differenzierbar ist;

- kritische Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$.

Beispiel 6.10 Sei $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}.$$



Wir suchen die Punkte, wo f sein globales Minimum und sein globales Maximum annimmt. Bei der Ableitung muss man ein wenig für $x < 0$ aufpassen und dies mittels einer Fallunterscheidung behandeln. Man erhält:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ \frac{5x-4}{-3\sqrt[3]{-x}}, & x < 0. \end{cases}$$

Es ist klar, dass f in 0 nicht differenzierbar ist und dass der einzige kritische Punkt $x_0 = \frac{4}{5}$ ist. Die Randpunkte des Intervalls liefern noch die Kandidaten -1 und 2 . Nun gilt

$$f(-1) = -3, \quad f(0) = 0, \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}, \quad f(2) = 0.$$

Also wird das Minimum -3 im Punkt $x = -1$, und das Maximum 0 in den Punkten $x = 0$ und $x = 2$ angenommen. Der kritische Punkt liefert weder Maximum noch Minimum (nur ein lokales Minimum). $\diamond$

6.4 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (Theorem 5.32) folgt nun der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen in verschiedenen Variationen.

Theorem 6.11 (Satz von Rolle [théorème de Rolle]) Sei $f \in C([a, b])$, mit $a < b$, eine in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.